

**Numerische und experimentelle
Untersuchungen zur
Grenzschichtbeeinflussung in
schwach leitfähigen Flüssigkeiten
durch Lorentzkräfte**

Kleiner Beleg

Elisa Kneisel

Betreuer:

T. Weier

G. Mutschke

Dr. G. Gerbeth

Prof. Dr.-Ing. N. A. Adams

24. November 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Versuchsaufbau	2
3	Elektromagnetisches Feld und Lorentzkraft	3
3.1	Elektrisches und magnetisches Feld	3
3.2	Lorentzkraft	4
4	Berechnung	5
4.1	Grundgleichungen	5
4.2	Diskretisierung und Programmierung	6
4.3	Untersuchung der Anfangsbedingung	7
4.4	Ergebnisse	8
5	Experimentelle Untersuchung	10
5.1	Untersuchungen ohne Lorentzkraft	11
5.2	Untersuchungen mit Grenzschichtbeeinflussung	13
6	Zusammenfassung	15
A	Quelltext	16
A.1	Lorentzkraft	16
A.2	Geschwindigkeitprofile	17
	Literatur	19

1 Einleitung

Diese praktikumsbegleitende Belegarbeit beschäftigt sich mit der Grenzschichtbeeinflussung schwach leitfähiger Flüssigkeiten durch elektromagnetische Felder. Sie wurde vom 02. September bis zum 20. Dezember 2002 im Forschungszentrum Rossendorf, Abteilung Magneto hydrodynamik durchgeführt.

Bei der laminaren Überströmung einer liegenden, ebenen Platte bildet sich ein Geschwindigkeitsprofil aus, welches Blasiusprofil genannt wird. Bis zu einer kritischen Reynoldszahl von $Re_x \approx 5 \cdot 10^5 \dots 10^6$ ist dieses Profil stabil, danach wird die Strömung turbulent. Das turbulente Geschwindigkeitsprofil verursacht nun größere Wandschubspannungen als das Blasiusprofil.

Um den Reibungswiderstand der Platte zu reduzieren, kann das Blasiusprofil, bevor es instabil wird, in ein anderes Geschwindigkeitsprofil überführt werden. Das neue Profil soll jetzt stabiler sein als das Blasiusprofil und gleichzeitig den Widerstand, den die Platte der Strömung entgegen bringt, reduzieren. Diese Bedingungen erfüllt das exponentielle Geschwindigkeitsprofil mit der Gleichung

$$u(y) = u_\infty \left(1 - e^{-k \cdot y} \right), \quad k > 0. \tag{1.1}$$

Die Definition der Konstante k wird in den nächsten Kapiteln deutlich.

In Abbildung 1 wurde der Widerstandsbeiwert c_f über die mit der Plattenlänge l gebildete Reynoldszahl aufgetragen. Die Kurven in diesem Diagramm repräsentieren den Übergang laminar-turbulent und die Grenzschicht des exponentiellen Geschwindigkeitsprofil. Bei kleinen Reynoldszahlen liegt der Widerstandsbeiwert c_f der exponentiellen Grenzschicht über denen der laminaren und der turbulenten Grenzschicht. Erst wenn $Re > 2 \cdot 10^7$ ist, kann diese Art der Grenzschichtbeeinflussung effektiv werden. Dann ist der Widerstand der überströmten Platte viel kleiner als bei einer unbeeinflussten Grenzschicht.

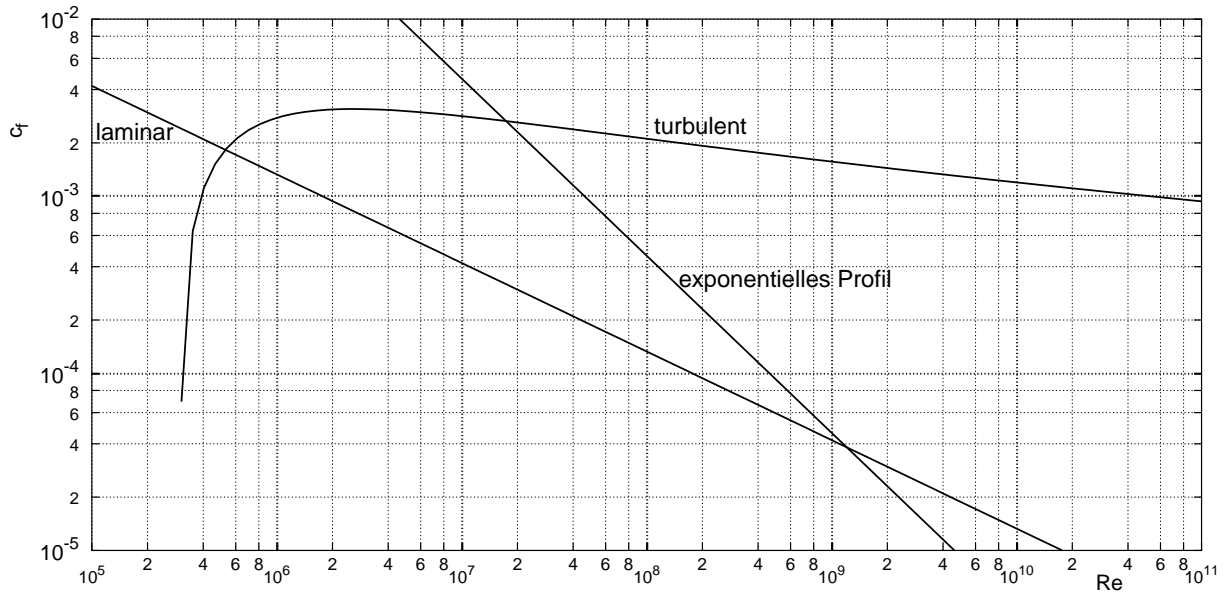


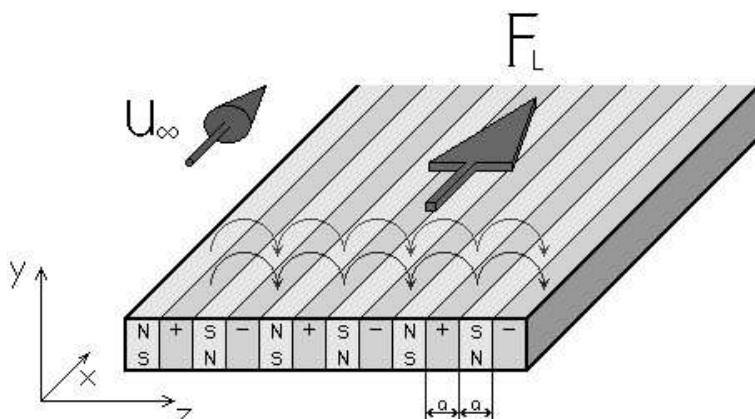
Abbildung 1: Widerstandsbeiwert c_f über die Reynoldszahl

$$\begin{aligned} \text{laminar } (Re < 5 \cdot 10^5 \dots 10^6): \quad c_f(Re) &= \frac{1,328}{\sqrt{Re}} & \text{turbulent } (Re > 10^7): \quad c_f(Re) &= \frac{0,455}{(\log Re)^{2,58}} \\ \text{exponentiell: } \quad c_f(Re) &= \frac{46130}{Re} & \text{mit } Re &= \frac{u_\infty l}{\nu} \end{aligned}$$

Damit sich das gewünschte Profil einstellt, wird die Strömung mit dem ausgebildeten Blasiusprofil ($Re_x < 5 \cdot 10^5$) der Wirkung einer Kraft ausgesetzt. Sie wirkt nur in unmittelbarer Wandnähe, also nur innerhalb der Grenzschicht. Wie diese Kraft entsteht und wie die Umwandlung des Geschwindigkeitsprofils vor sich geht, soll in der vorliegenden Arbeit behandelt werden.

2 Versuchsaufbau

In dieser Arbeit wird der Fall untersucht, dass ein ausgebildetes Blasiusprofil bei der Überströmung einer ebenen liegenden Platte in ein elektromagnetisches Feld eintritt. Von da an wird die Grenzschicht so beeinflusst, dass das Blasiusprofil im Laufe der weiteren Strömung umgewandelt wird. Das Geschwindigkeitsprofil, welches sich dabei asymptotisch einstellt, ist das exponentielle Profil mit der Gleichung (1.1). Der Impuls, der zur Umwandlung des Geschwindigkeitsprofils notwendig ist, wird durch eine äußere Kraft in das Fluid eingebracht. Diese Kraft ist die von dem elektromagnetischen Feld erzeugte Lorentzkraft. Voraussetzung für diese Art der Grenzschichtbeeinflussung ist, dass das Fluid eine schwache elektrische Leitfähigkeit besitzt.



Bei dem hier verwendeten Koordinatensystem ist die x -Richtung die Strömungsrichtung des Fluids, y gibt den Abstand zur Platte an und die z -Richtung ist die Spannrichtung der Platte.

Abbildung 2: im Versuch verwendete Platte

Im Bild 2 ist der prinzipielle Versuchsaufbau skizziert. In einem Umlaufkanal liegt die ebene Platte, die aus abwechselnd angeordneten Elektroden und Dauermagneten aufgebaut ist. Wird an die Elektroden eine Spannung angelegt, entsteht ein elektrisches Feld, welches stets etwa senkrecht auf dem magnetischen Feld steht. Dadurch wirkt eine Lorentzkraft auf das strömende Fluid. Sie ist je nach Polung der Elektroden in oder entgegen der Strömungsrichtung gerichtet. Hier soll sie in Strömungsrichtung wirken, um das Fluid der Grenzschicht zu beschleunigen, wodurch das Anwachsen der Grenzschicht verhindert wird.

3 Elektromagnetisches Feld und Lorentzkraft

3.1 Elektrisches und magnetisches Feld

Die Herleitung der analytischen Lösungen für das elektrische und das magnetische Feld wurde von V.V. Avilov [1] durchgeführt. Hier sind nur die Ergebnisse aufgeführt.

Die Komponenten der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte werden durch die folgenden zwei komplexen Gleichungen beschrieben.

$$E_z + i E_y = \frac{2\pi U_0}{L} \frac{\sqrt{2}}{i b \sqrt{\cos(2\zeta)}} \quad (3.1)$$

$$B_z - i B_y = \frac{M_0}{2\pi} \ln \left(\frac{\tan(\frac{\zeta}{2} - \frac{3}{8}\pi) \tan(\frac{\zeta}{2} - \frac{\pi}{8} + 2\pi i \frac{H}{L})}{\tan(\frac{\zeta}{2} - \frac{3}{8}\pi + 2\pi i \frac{H}{L}) \tan(\frac{\zeta}{2} - \frac{\pi}{8})} \right) \quad (3.2)$$

Darin bedeuten:

- $\zeta = \frac{2\pi}{L} (z + i y)$ komplexe Variable
- $b = 1,85407$ Konstante aus der konformen Abbildung
- $L = 4a$ Länge einer Periode von Magneten und Elektroden
- $H = 4a$ Höhe der Magneten
- U_0 – an den Elektroden angelegtes elektrisches Potential
- M_0 – Magnetisierung der Permanentmagnete (Remanenz)

Die Magnete besitzen eigentlich nur eine Höhe von $H = 2a$, da sie aber auf einer Eisenrückflussplatte aufliegen, kann in der Rechnung die doppelte Höhe angenommen werden.

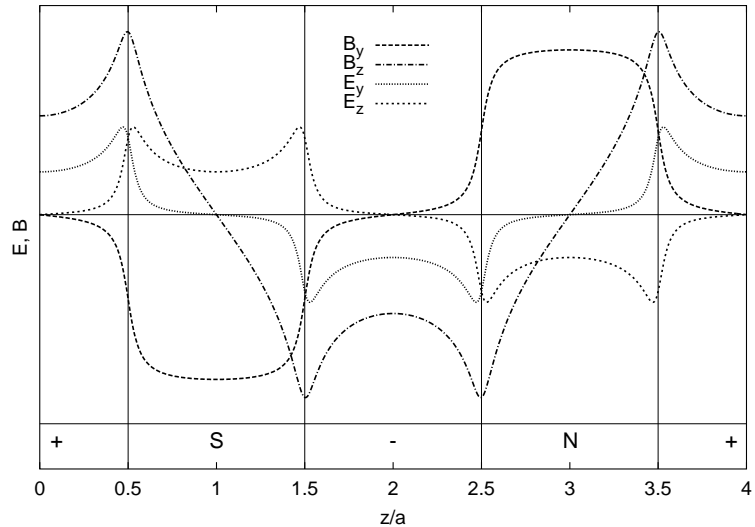


Abbildung 3:
y- und z- Komponenten von
elektrischem und magnetischem
Feld über der Spannweite z/a
bei $y = 0,05 a$

In Abbildung 3 sind die beiden Komponenten der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte dargestellt. Die vier Kurven wurden mit einer Entfernung zur Platte von $y = 0,05 a$ berechnet. Direkt auf der Plattenoberfläche, also bei einem Abstand von $y = 0$ sind die Beträge von E_y , E_z und B_z an den Übergangsstellen zwischen Elektrode und Magnet theoretisch unbegrenzt groß. Das liegt daran, dass die Gleichungen für \vec{E} und \vec{B} ((3.1) und (3.2)) an den entsprechenden Stellen Lösungen besitzen, die gegen unendlich gehen. In der Realität haben die Beträge der Feldstärken allerdings eine endliche Größe, da die Kanten der Elektroden und Magnete nicht genau rechtwinklich, sondern fertigungstechnisch bedingt etwas abgerundet sind.

3.2 Lorentzkraft

Durch das elektromagnetische Feld und die Überströmung der Platte mit einer leitfähigen Flüssigkeit wird eine Lorentzkraft \vec{F}_L induziert, die nach der folgenden Gleichung berechnet werden kann.

$$\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.3)$$

Darin ist \vec{J} die Stromdichte (in A/m^2) und \vec{B} die magnetische Flussdichte (in T). Die Stromdichte \vec{J} erhält man aus dem Ohmschen Gesetz für bewegte Medien

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right), \quad (3.4)$$

worin σ die elektrische Leitfähigkeit des Fluids (in S/m), \vec{E} die Stärke des über die Elektroden angelegten elektrischen Feldes (in V/m) und \vec{u} das Strömungsfeld (in m/s) bedeuten. Da das Produkt aus Geschwindigkeit \vec{u} und magnetischem Feld \vec{B} hier klein gegenüber dem elektrischen Feld \vec{E} sein soll $|\vec{u} \times \vec{B}| \ll |\vec{E}|$, kann deren Einfluss auf die Stromdichte vernachlässigt werden. Somit hat die Strömungsgeschwindigkeit keine nennenswerte Wirkung auf die Lorentzkraft. Gleichung (3.4) wird also zu

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (3.5)$$

Setzt man diesen Zusammenhang in Gleichung (3.3) ein und berücksichtigt, dass die Felder nur Komponenten in y - und z - Richtung haben, erhält man eine in Strömungsrichtung gerichtete Lorentzkraft:

$$F_L = \sigma (E_z B_y - E_y B_z) \quad (3.6)$$

Sie wurde für verschiedene Plattenabstände im Diagramm 4 aufgezeichnet. Die Lorentzkraft und die Feldstärken aus Abbildung 3 wurden mit einem Programm berechnet, dessen Quelltext sich im Anhang A.1 befindet.

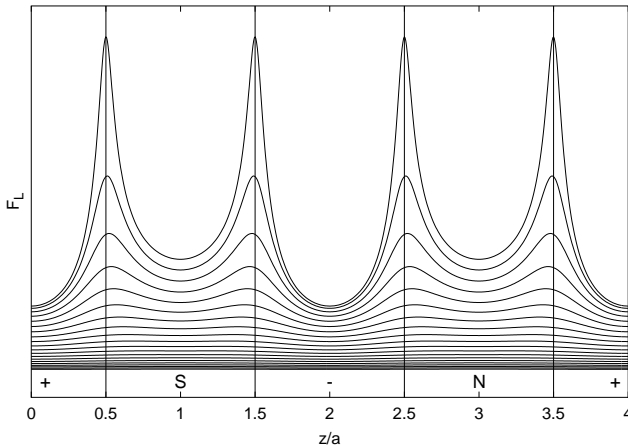


Abbildung 4:
Lorentzkraft $F_L(y, z)$ über eine Periode
von Elektroden und Magneten bei den
Wandabständen

$$y/a = 0,05; 0,1; 0,15 \dots 1$$

Nah an der Wand hat der Kraftverlauf große Extremwerte, die mit den oben erwähnten Singularitäten der Gleichungen (3.1) und (3.2) zusammenhängen. Mit größer werdender Entfernung von der Plattenoberfläche wird der Verlauf der Lorentzkraft glatter und kann schließlich als konstant über die Plattenbreite z angesehen werden. Weiterhin kann man feststellen, dass der Betrag der Kraft mit zunehmendem Wandabstand exponentiell abnimmt, wodurch die Kraft nur in der Grenzschicht wirkt. Mit Hilfe dieser Beobachtungen lässt sich die Lorentzkraft zu folgender Gleichung vereinfachen.

$$F_L(y) = \frac{\pi}{8} j_0 M_0 e^{-\frac{\pi}{a} y} \quad (3.7)$$

worin j_0 (in A/m^2) der Betrag der Stromdichte ist. Für diese Gleichung wurde die Lorentzkraft unter der Annahme $h \rightarrow \infty$ über die Plattenbreite z gemittelt. Der Fehler, welcher durch die Mittelung und die Magneten von unbegrenzter Tiefe gemacht wird, ist nur gering. Die Lorentzkraft (3.7) besitzt die Dimension $\left[\frac{N}{m^3} \right]$. Sie ist auf ein Volumenelement bezogen.

4 Berechnung

4.1 Grundgleichungen

Mit Hilfe der von L. Prandtl begründeten Grenzschichttheorie können die Navier-Stokesschen Gleichungen vereinfacht werden (siehe H. Schlichting [4]). Dazu wird vorausgesetzt, dass es sich um ein zweidimensionales Problem handelt, also keine Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung existiert. Die Abmessungen und Geschwindigkeiten in y-Richtung sind viel kleiner als die in x-Richtung ($\delta \ll x$ und $v \ll u$). Außerdem liegt ein inkompressibles Newtonsches Fluid vor, die Strömung ist stationär und der Druck bleibt in Strömungsrichtung konstant. Die Impulsgleichung für die x-Komponente (4.1) erhält einen Zusatzterm mit der auf das Volumenelement bezogenen Lorentzkraft aus Gleichung (3.7). Hinzu kommt die Kontinuitätsgleichung (4.2) für inkompressible Fluide. Die Gleichungen der Plattengrenzschicht haben nun folgendes Aussehen.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_L \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y = 0 : & \quad u = v = 0 \\ y \rightarrow \infty : & \quad u = u_\infty \end{aligned} \quad (4.3)$$

Anfangsbedingung: Vor dem Eintritt in das elektromagnetische Feld hat sich bereits ein Geschwindigkeitsprofil nach Blasius ausgebildet. Es wird durch seine Verdrängungsdicke δ_1 bzw. seine Einlaufänge x_0 charakterisiert.

Um eine allgemeine Gültigkeit zu erhalten, werden die Grenzschichtgleichungen dimensionslos gemacht. Dazu dienen geeignete charakteristische Größen.

$$\bar{x} = \frac{\pi^2 \nu}{a^2 u_\infty} x \quad \bar{y} = \frac{\pi}{a} y \quad \bar{u} = \frac{1}{u_\infty} u \quad \bar{v} = \frac{a}{\pi \nu} v \quad Z = \frac{a^2 j_0 M_0}{8 \pi \nu \rho u_\infty} \quad (4.4)$$

Bei dieser Entdimensionalisierung ist die Vorgabe der Reynoldszahl nicht notwendig. Die Gleichungen (4.1) und (4.2) werden zu:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + Z e^{-\bar{y}} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.6)$$

Der Parameter Z gibt das Verhältnis von elektromagnetischer Kraft zu Zähigkeitskraft an. Nur wenn für ihn die Bedingung

$$Z = 1 \quad (4.7)$$

erfüllt ist, hat das Differentialgleichungssystem mit den entsprechend modifizierten Randbedingungen die spezielle Lösung

$$\bar{u}(\bar{y}) = 1 - e^{-\bar{y}} \quad , \quad \bar{v}(\bar{y}) = 0 \quad (4.8)$$

Dann bleibt die Grenzschicht gleichdick, denn durch die Lorentzkraft wird genau der Impuls in die Grenzschicht der Strömung eingebracht, der durch die Reibung verloren geht.

Bei diesem Profil handelt es sich um das exponentielle Geschwindigkeitsprofil, welches in der Einleitung mit Gleichung (1.1) vorgestellt wurde. Es stellt sich unter der Wirkung der elektromagnetischen Kraft asymptotisch ein.

4.2 Diskretisierung und Programmierung

Um einen Rechenalgorithmus zur Lösung der dimensionslosen Grenzschichtgleichungen (4.5) und (4.6) zu erhalten, werden die einzelnen Terme unter Zuhilfenahme finiter Differenzen (siehe C.A.J. Fletcher [2] und G. Mutschke [3]) diskretisiert. Das verwendete Rechengitter ist in x - und in y -Richtung äquidistant.

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right|_j^{k+1} = \frac{3u_j^{k+1} - 4u_j^k + u_j^{k-1}}{2 \Delta x} \quad (4.9)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right|_j^{k+1} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - u_{j-1}^{k+1}}{2 \Delta y} \quad ; \quad \left. \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right|_j^{k+1} = \frac{v_{j+1}^{k+1} - v_{j-1}^{k+1}}{2 \Delta y} \quad (4.10)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right|_j^{k+1} = \frac{u_{j-1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j+1}^{k+1}}{\Delta y^2} \quad (4.11)$$

Dieses Verfahren ist vollständig implizit und hat eine Genauigkeit zweiter Ordnung. Die nicht differenzierten Geschwindigkeitskomponenten auf der linken Seite von Gleichung (4.5) werden aus den bereits bekannten Geschwindigkeiten stromauf extrapoliert.

$$u_j^{k+1} = 2u_j^k - u_j^{k-1} \quad ; \quad v_j^{k+1} = 2v_j^k - v_j^{k-1} \quad (4.12)$$

Nach dem Einsetzen dieser Ausdrücke in die Grenzschichtgleichungen entsteht ein tridiagonales lineares Gleichungssystem für die noch unbekannte Geschwindigkeit u^{k+1} .

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j \quad (4.13)$$

Diese Gleichung gilt für $j = 2 \dots (n-1)$. An den Ränder sind die Geschwindigkeiten wegen der Randbedingungen (4.3) vorgegeben.

$$u_1 = v_1 = 0 \quad ; \quad u_n = 1$$

Die Koeffizienten werden aus den bekannten Geschwindigkeitskomponenten stromauf berechnet.

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{\Delta x}{\Delta y} \left(-2v_j^k + v_j^{k-1} - \frac{2}{\Delta y} \right) \\ b_j &= 6u_j^k - 3u_j^{k-1} + 4 \frac{\Delta x}{\Delta y^2} \\ c_j &= \frac{\Delta x}{\Delta y} \left(2v_j^k - v_j^{k-1} - \frac{2}{\Delta y} \right) \\ d_j &= \left(4u_j^k - u_j^{k-1} \right) \left(2u_j^k - u_j^{k-1} \right) + 2 \Delta x Z e^{-y_j} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nun wird der Thomas-Algorithmus durchgeführt. Nach der Vorwärtssubstitution erhält man die neuen Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \quad , \quad \alpha_j = \frac{a_j \alpha_{j-1}}{b_j - a_j \gamma_{j-1}} \quad j = 2 \dots (n-1) \\ \gamma_1 &= 0 \quad , \quad \gamma_j = \frac{c_j}{b_j - a_j \gamma_{j-1}} \quad j = 2 \dots (n-1) \\ \delta_1 &= 0 \quad , \quad \delta_j = \frac{d_j - a_j \delta_{j-1}}{b_j - a_j \gamma_{j-1}} \quad j = 2 \dots (n-1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

mit denen die Geschwindigkeitskomponente u^{k+1} bei der Rückwärtssubstitution berechnet wird.

$$u_j^{k+1} = \delta_j + \gamma_j u_{j+1}^{k+1} + \alpha_j u_1 \quad j = (n-1) \dots 2 \quad (4.16)$$

Da für die Wandgeschwindigkeit gilt $u_1 = 0$, ist die Berechnung von α_j nicht nötig. Um die Quergeschwindigkeit v^{k+1} zu berechnen, wird die Kontinuitätsgleichung (4.6) zwischen den zwei Gitterpunkten $\left(\bar{x}_j^{k+1}\right)$ und $\left(\bar{x}_{j-1}^{k+1}\right)$ mit Hilfe der Gleichung (4.9) diskretisiert.

$$v_j^{k+1} = v_{j-1}^{k+1} - \frac{\Delta y}{4\Delta x} \left(3(u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}) - 4(u_j^k + u_{j-1}^k) + (u_j^{k-1} + u_{j-1}^{k-1}) \right) \quad (4.17)$$

Der in FORTRAN 77 programmierte Lösungsalgorithmus befindet sich im Anhang A.2.

4.3 Untersuchung der Anfangsbedingung

Variiert man die Größe des Blasiusprofils, welches in das elektromagnetische Feld eintritt, erhält man große Unterschiede in der Qualität des Übergangs zum exponentiellen Profil. Abbildung 5 zeigt die Ergebnisse der Berechnungen mit zwei unterschiedlichen Anfangsbedingungen. Die letzte, gestrichelte Kurve ist das exponentielle Profil, welches sich asymptotisch einstellt.

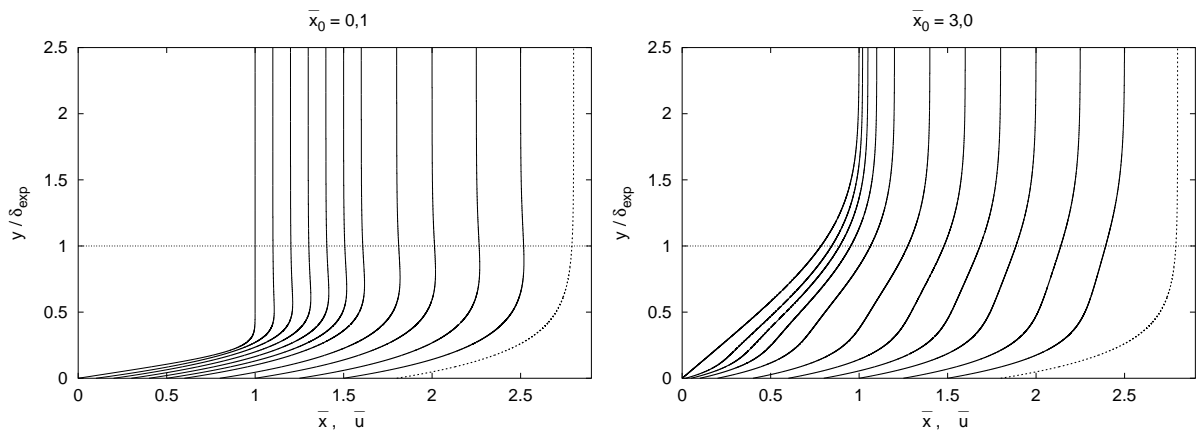


Abbildung 5: Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung $\bar{u}\left(\frac{y}{\delta_{exp}}\right)$ an verschiedenen Stellen stromab ($\bar{x} = 0 \dots 1,5$)

Bei der Berechnung der Geschwindigkeitsprofile im linken Bild war die Grenzschichtdicke des Blasiusprofils deutlich kleiner als die Dicke des exponentiellen Profils, $\delta = 0,34 \cdot \delta_{exp}$. Das entspricht einer Einlauflänge von $\bar{x}_0 = 0,1$. Dieses Blasiusprofil ist zu klein, denn die Reichweite der Lorentzkraft ist größer als die Dicke des Profils. Dadurch wird Impuls nicht nur in die Grenzschicht, sondern auch in außerhalb strömendes Fluid eingebracht. Als Folge übersteigt die Geschwindigkeit u die Endgeschwindigkeit u_∞ leicht.

Das Blasiusprofil im rechten Bild der Abbildung 5 ist sehr groß beim Eintritt in das elektromagnetische Feld ($\bar{x}_0 = 3$ bzw. $\delta = 1,88 \cdot \delta_{exp}$). Die Lorentzkraft kann nur noch das wandnahe Fluid beschleunigen, für das weiter entfernte Fluid am Grenzschichtrand reicht die Kraft nicht mehr aus. Dadurch dauert der Übergang zum exponentiellen Profil sehr lange und die Zwischenprofile haben möglicherweise einen Wendepunkt, was auf Instabilität hinweist.

Nun soll untersucht werden, bei welchem Blasiusprofil die Lorentzkraft die optimale Reichweite hat und der Übergang zum asymptotischen Profil am schnellsten geht.

Ein Maß für die Abweichung eines Profils vom exponentiellen Profil ist der mittlere Absolutbetrag der relativen Geschwindigkeitsdifferenz D .

$$D = \frac{1}{y_{max}} \int_{y=0}^{y_{max}} \left| \frac{u(y) - u_{exp}(y)}{u_{exp}(y)} \right| dy \quad (4.18)$$

Verfolgt man den Verlauf dieser Größe während der Überströmung der Platte, erhält man einen qualitativen Eindruck der Dauer bis zum Erreichen des exponentiellen Profils.

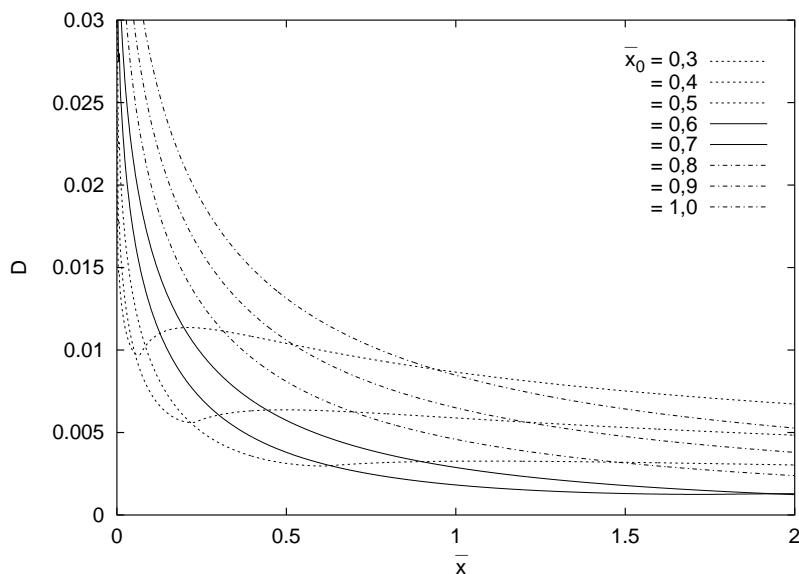


Abbildung 6:
mittlere gewichtete Abweichung vom exp. Profil $D(\bar{x})$
während der Überströmung
der Platte

Die zwei Kurven, die sich im Diagramm 6 am schnellsten der Null nähern, entsprechen den Anfangsbedingungen $\bar{x}_0 = 0,6$ und $\bar{x}_0 = 0,7$, wobei das Kriterium $D \leq 1 \cdot 10^{-3}$ am schnellsten von einer Kurve mit $\bar{x}_0 = 0,65$ erfüllt wird. Das asymptotische Profil hat sich in diesem Fall nach der Strecke $\bar{x} = 1,83$ entwickelt. Es sollte also gelten:

$$0,6 \leq \bar{x}_{0,opt} \leq 0,7 \quad (4.19)$$

4.4 Ergebnisse

Hier ist die Strömung mit einer im günstigen Bereich liegenden Anfangsbedingung ($\bar{x}_0 = 0,65$) berechnet worden. Die Geschwindigkeitsprofile des Übergangs vom Blasius- zum exponentiellen Profil sind in Abbildung 7 zusammengestellt. Abbildung 8 zeigt den Verlauf der Parameter Grenzschichtdicke δ , Verdrängungsdicke δ_1 und Impulsverlustdicke δ_2 .

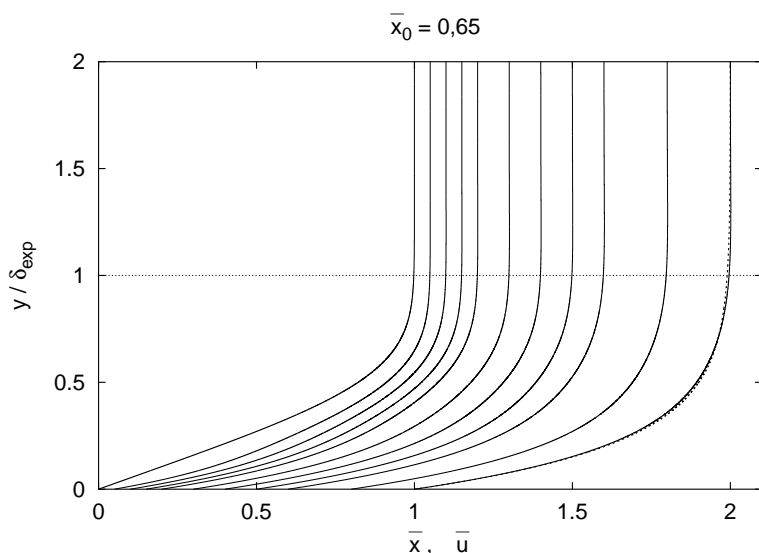


Abbildung 7:
Geschwindigkeitsprofile $\bar{u}(\frac{y}{\delta_{exp}})$
beim besten Übergang vom
Blasius- zum exponentiellen
Profil

Da nun das günstigste Anfangsprofil mit $\bar{x}_{0,opt}$ nach (4.19) bekannt ist, können mit der Definition aus Gleichung (4.4) die fehlenden Größen bestimmt werden. Für Profile nach Blasius gilt (siehe H. Schlichting [4])

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \quad (4.20)$$

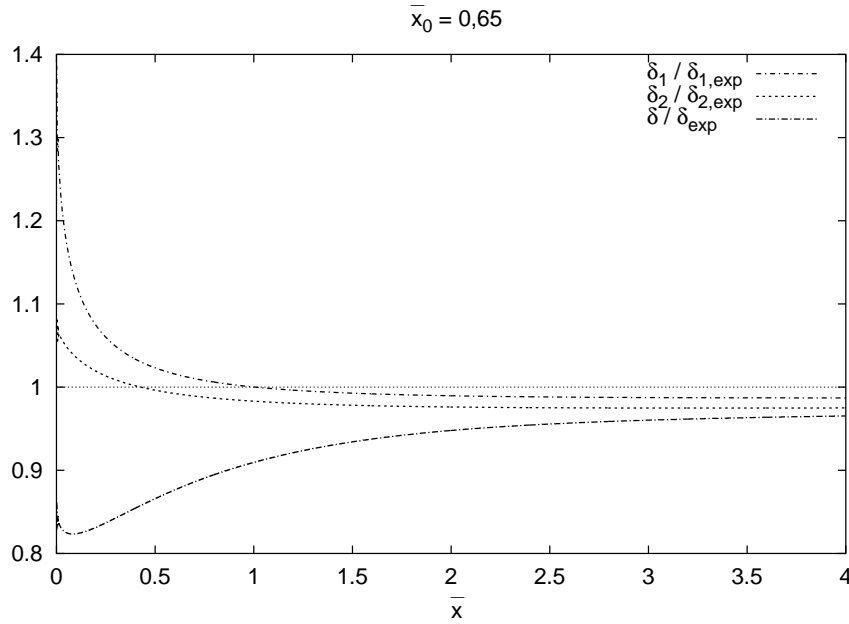


Abbildung 8: Grenzschichtdicke δ/δ_{exp} , Verdrängungsdicke $\delta_1/\delta_{1,exp}$ und Impulsverlustdicke $\delta_2/\delta_{2,exp}$ im Verlauf der Strömung

Bei bekannten Strömungsverhältnissen (x_0 und u_∞ z.B. durch Messung gekannt), kann die benötigte Breite von Elektroden und Magneten berechnet werden.

$$a = \frac{\pi}{\sqrt{\bar{x}_{0,opt}}} \sqrt{\frac{\nu x_0}{u_\infty}} \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{\pi}{5\sqrt{\bar{x}_{0,opt}}} \delta_0 \quad (4.21)$$

Mit Gleichung (4.19):

$$\boxed{a \approx (3,8 \dots 4,1) \cdot \sqrt{\frac{\nu x_0}{u_\infty}}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{a \approx (0,75 \dots 0,81) \cdot \delta_0} \quad (4.22)$$

Ist die Platte, wie hier im Versuch, bereits fertig (a vorgegeben), muss die günstigste Strömungsgeschwindigkeit eingestellt werden. Da das Blasiusprofil am Eintritt aber selbst von der Anströmungsgeschwindigkeit u_∞ abhängt, muss die richtige Geschwindigkeit experimentell ermittelt werden. Dabei hilft folgender Zusammenhang.

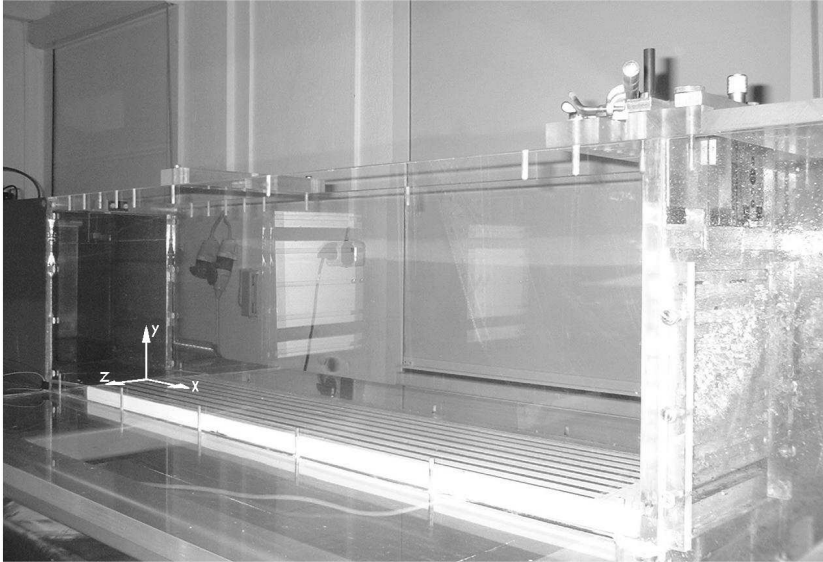
$$\frac{u_\infty}{x_0} = \frac{\pi^2}{\bar{x}_{0,opt}} \frac{\nu}{a^2} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{u_\infty}{x_0} \approx (14 \dots 16) \cdot \frac{\nu}{a^2}} \quad (4.23)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (4.20) erhält man die Grenzschichtdicke, die das Blasiusprofil am Eintritt in das elektromagnetische Feld haben sollte.

$$\delta_0 = \frac{5\sqrt{\bar{x}_{0,opt}}}{\pi} a \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\delta_0 \approx (1,23 \dots 1,33) \cdot a} \quad (4.24)$$

5 Experimentelle Untersuchung

Die Messungen wurden in dem Wasserumlaufkanal durchgeführt, der in Abbildung 9 zu sehen ist. Sein Fassungsvermögen beträgt ca. 500 Liter. Die Messstrecke hat die Abmessungen $0,2\text{ m} \times 0,2\text{ m} \times 1,2\text{ m}$ und endet mit einer Lochplatte, die gewährleisten soll, dass in jeder Höhe die gleiche Wassermenge abfließt (ganz rechts im Bild).



Breite der Elektroden und Magnete:

$$a = 0,01\text{ m}$$

Länge der Elektroden und Magnete:

$$L = 0,85\text{ m}$$

Teil der Plattenoberfläche, der von Elektroden eingenommen wird:

$$A_{el} = 0,1122\text{ m}^2$$

Abbildung 9: Messstrecke mit Platte

Für die Überströmung der Platte wurde eine 1%-ige Natronlauge eingesetzt. Sie hat etwa die gleichen Eigenschaften wie Salzwasser, verursacht aber deutlich weniger Korrosion während der an den Elektroden stattfindenden Elektrolyse. Damit verlängert sich die Lebensdauer der verwendeten Platte erheblich. Die Kennwerte der NaOH-Lauge sind:

$$\begin{aligned} \text{Dichte:} \quad \rho &= 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ \text{kinematische Zähigkeit:} \quad \nu &= 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \\ \text{elektrische Leitfähigkeit:} \quad \sigma &= 4.6 \frac{\text{S}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Die Platte ist aus abwechselnd angeordneten Magneten und Elektroden aufgebaut, zwischen denen sich eine dünne Isolierschicht befindet. Die Magnete stehen mit ihrer unteren Polfläche auf einer Eisenrückflussplatte, wodurch die magnetische Feldstärke vergrößert wird (siehe Abschnitt 3.1). Mit einem Feldstärkemesser wurde die y-Komponente der magnetischen Feldstärke in verschiedenen Abständen zur Platte gemessen und die Magnetisierung der Magnete zu

$$M_0 = 1\text{ T}$$

bestimmt. In Abbildung 10 sind die Messwerte bei sechs verschiedenen Wandabständen und die analytische Lösung mit $M_0 = 1\text{ T}$ gemeinsam aufgetragen. Möglicherweise sind die Magnete leicht verkippt, sodass es zwischen den beiden Kurven kleine Differenzen gibt.

Mit der Bedingung $Z = 1$ und der Gleichung (4.4) kann die erforderliche Stromdichte j_0 und daraus die einzustellende Stromstärke I berechnet werden.

$$j_0 = 4 \frac{I}{A_{el}} = \frac{8\pi \nu \rho Z}{a^2 M_0} \cdot u_\infty \quad \Rightarrow \quad I = 7.05\text{ A} \cdot \frac{u_\infty}{\text{m/s}} \quad (5.1)$$

Bei den Magneten handelt es sich um Dauermagnete aus Neodymium-Eisen-Bor (NdFeB). Dieser Werkstoff gehört zu den Seltenen Erden.

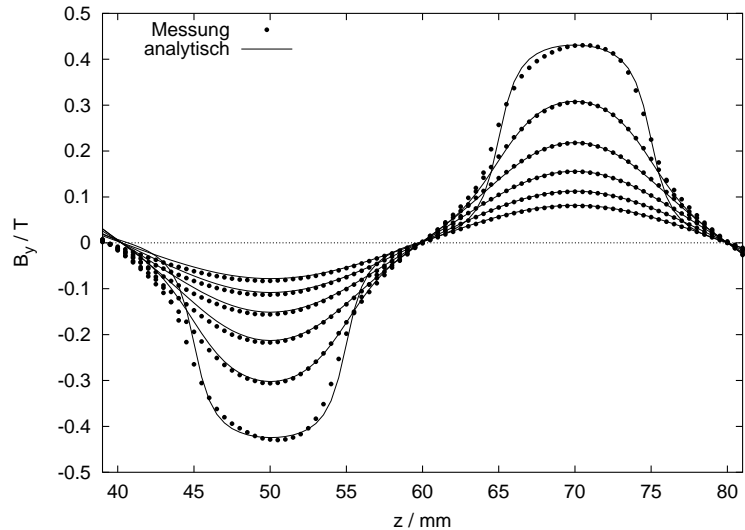


Abbildung 10: magnetischen Flussdichte $B_y(z)$ bei $y = 1; 3; 5; 7; 9$ und 11 mm

Die günstigste Strömungsgeschwindigkeit u_∞ sollte, wie im letzten Abschnitt erläutert, eingestellt werden, sodass das Blasiusprofil mit der richtigen Größe in das elektromagnetische Feld eintritt. Dabei helfen die Gleichungen (4.23) bis (4.24).

Die Geschwindigkeitsmessungen erfolgten mit einem Laser-Doppler-Anemometer. Der Strahl des Argon-Ionen-Laser 2020-5 von „SPECTRA PHYSICS“ hatte die Wellenlänge $514,5 \text{ nm}$ (grün). Gemessen wurde nach der Differential- bzw. Kreuzstrahlmethode. Weitere Teile der Messeinrichtung waren der Prozessor FVA 58N40 der Firma „DANTEC“ und eine 3-Achs-Traversierung von „ISEL“, die die Ansteuerung des Messvolumens ermöglichte.

5.1 Untersuchungen ohne Lorentzkraft

Die ersten Messungen galten der Überprüfung des Kanals und der vorhandenen Messbedingungen und wurden ohne Beeinflussung der Grenzschicht durchgeführt.

Um die Strömungsqualität in der Messstrecke des Umlaufkanals abschätzen zu können, wurde zu Beginn der gesamte Kanal vermessen. Das heißt, die Geschwindigkeit u wurde über die Höhe y und die Breite z an mehreren festen Stellen x aufgenommen.

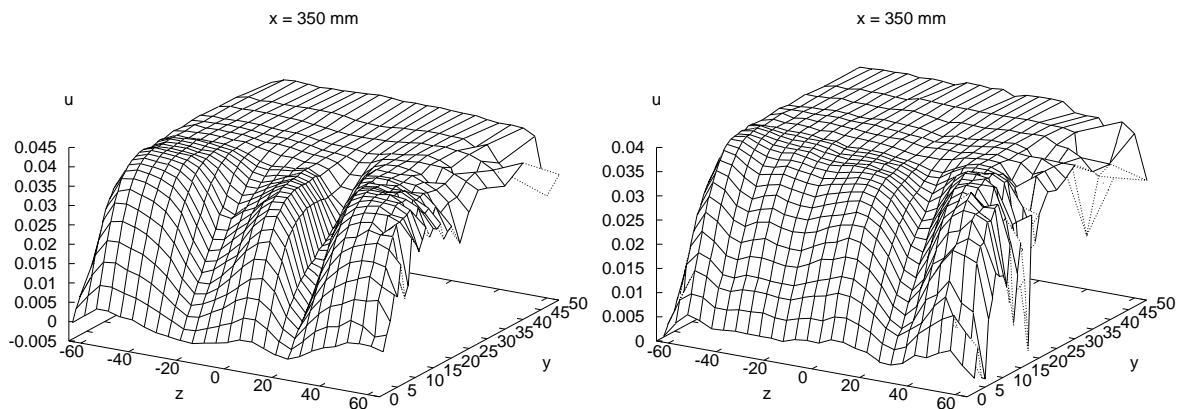


Abbildung 11: Geschwindigkeit $u(y, z)$ an der Stelle $x = 350 \text{ mm}$
links: vor der Reinigung *rechts:* nach der Reinigung

Die Messergebnisse, die im linken Diagramm der Abbildung 11 dargestellt sind, weisen starke Unregelmäßigkeiten auf. Dabei handelte es sich möglicherweise um Wirbel, die durch einen ungleichmäßigen Vorlauf verursacht werden könnten. Nach einer gründlichen Reinigung des Kanals und dem Erneuern aller Filter und Siebe war der Verlauf der Geschwindigkeit über die Spannweite (rechtes Diagramm der Abbildung 11) ausreichend glatt. Ein günstiger Messbereich liegt also bei $z = -50 \dots 0 \text{ mm}$, denn hier herrscht eine annähernd homogene Geschwindigkeit.

Vor dem Messen mit Grenzschichtkontrolle muß das Vorhandensein eines Blasiusprofils festgestellt werden. Dazu wurde die Anströmgeschwindigkeit variiert und einige Geschwindigkeitsprofile gemessen. Die in Bild 12 dargestellten Verläufe stellten sich bei $x = 750 \text{ mm}$ (etwa 10 cm vor dem Auslauf) ein. Wählt man die Anströmgeschwindigkeit zu groß, werden die Geschwindigkeitsprofile durch die Verwirbelungen der Lochplatte stark beeinflusst. Die Geschwindigkeit sollte demnach nicht größer als $u_\infty = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sein damit der Messbereich in x-Richtung ausreichend lang ist.

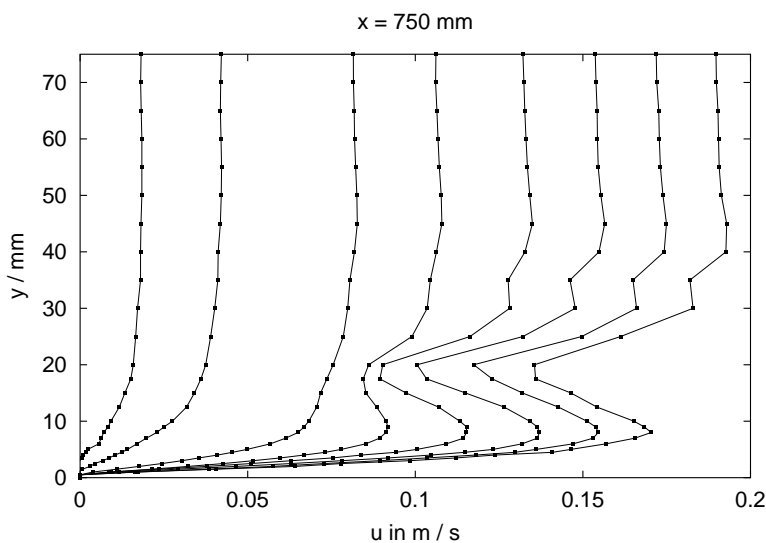


Abbildung 12: Geschwindigkeitsverlauf $u(y)$ an der Stelle $x = 750 \text{ mm}$ bei den Anströmgeschwindigkeiten $u_\infty = 0,02; 0,04; 0,08; 0,1; 0,13; 0,15; 0,17$ und $0,19 \text{ m/s}$

Bei der Überströmung der Platte ohne Grenzschichtbeeinflussung wurden die Geschwindigkeitsprofile der Abbildung 13 gemessen. In die beiden Diagramme sind zusätzlich berechnete Blasiusprofile eingezeichnet, die zu den gemessenen Kurven passen. In beiden Fällen betrug die Anströmgeschwindigkeit $u_\infty = 0,065 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

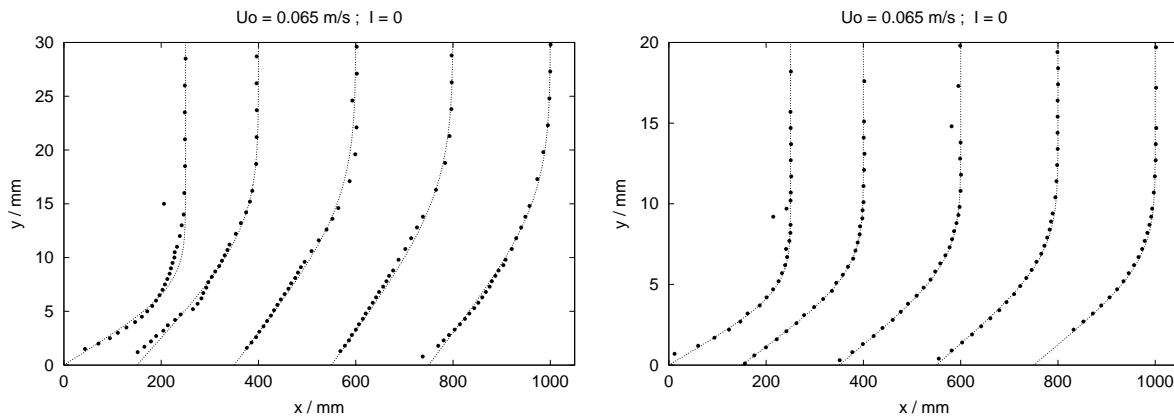


Abbildung 13: Geschwindigkeitsverlauf $u(y)$, gemessen bei $z = -20 \text{ mm}$ und $z = -50 \text{ mm}$

Kurve	gemessene Profile		berechnete Profile bei			
	x/mm	\bar{x}	$z = -20 \text{ mm}$		$z = -50 \text{ mm}$	
	x/mm	\bar{x}	x/mm	\bar{x}	x/mm	\bar{x}
1	0	0	370	0,57	150	0,22
2	150	0,23	370 + 780	0,57 + 1,17	150 + 80	0,22 + 0,13
3	350	0,53	370 + 1260	0,57 + 1,9	150 + 140	0,22 + 0,21
4	550	0,84	370 + 1460	0,57 + 2,2	150 + 170	0,22 + 0,26
5	750	1,14	370 + 1260	0,57 + 1,9	150 + 140	0,22 + 0,21

Tabelle 1: Lauffängen der Blasiusprofile aus Abbildung 13
Vergleich zwischen Messwerten und angepassten berechneten Profilen

Es ist vor allem im rechten Diagramm deutlich zu sehen, dass sich bei der Überströmung der Platte Blasiusprofile einstellen. Auch dass sie im Laufe der Strömung anwachsen (vom letzten abgesehen) wird aus Tabelle 1 deutlich. Leider entwickeln sie sich nicht so, wie es der Theorie nach zu erwarten wäre. Bei $z = -20 \text{ mm}$ wachsen die Profile während der ersten Hälfte der Platte viel zu schnell an. Von $x = 350 \text{ mm}$ bis $x = 550 \text{ mm}$ stimmt das Wachstum mit der Theorie überein. Danach wird das Fluid möglicherweise durch den Auslauf leicht beschleunigt, sodass die Grenzschicht wieder dünner wird. Dieses Phänomen tritt auch bei $z = -50 \text{ mm}$ auf. Hier wachsen die Profile ebenfalls an, allerdings viel langsamer als theoretisch berechnet. Die Unterschiede zwischen den Messungen bei $z = -20 \text{ mm}$ und $z = -50 \text{ mm}$ werden wahrscheinlich durch die ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung über die Spannrichtung der Platte verursacht (Abbildung 11). Möglicherweise existiert im Kanal eine nicht vernachlässigbare Quergeschwindigkeit. Ebenfalls denkbar wäre eine „Verzerrung“ der Profile durch die Rampe, über die das Fluid auf die ca. 3 cm hohe Platte geleitet wird.

5.2 Untersuchungen mit Grenzschichtbeeinflussung

Da die Ergebnisse im letzten Abschnitt bei $z = -20 \text{ mm}$ von keiner guten Qualität waren, wurde die Vermessung der Grenzschicht, die unter dem Einfluss der Lorentzkraft steht, nur bei $z = -50 \text{ mm}$ durchgeführt. Wie bei den Messwerten der Abbildung 13 wurde auch hier eine Anströmgeschwindigkeit von $u_\infty = 0,065 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ eingestellt. Damit beträgt nach Gleichung (5.1) die theoretisch notwendige Stromstärke $I = 0,46 \text{ A}$.

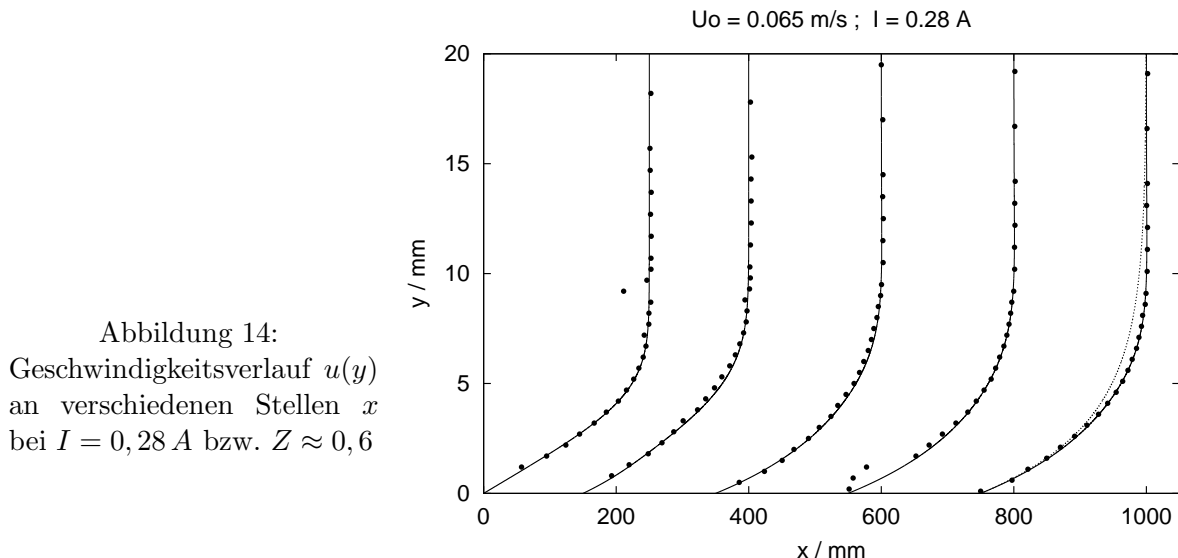


Abbildung 14:
Geschwindigkeitsverlauf $u(y)$
an verschiedenen Stellen x
bei $I = 0,28 \text{ A}$ bzw. $Z \approx 0,6$

Im Rechenprogramm beginnt die Lorentzkraft plötzlich bei $x = 0$ in voller Stärke auf das Fluid einzuwirken. Im Versuch fängt das elektromagnetische Feld aber schon vor der Platte an

Kurve	gemessene Profile		berechnete Profile bei $z = -50 \text{ mm}$	
	x/mm	\bar{x}	x/mm	\bar{x}
1	0	0	150	0,22
2	150	0,23	200 + 10	0,3 + 0,01
3	350	0,53	200 + 100	0,3 + 0,15
4	550	0,84	200 + 130	0,3 + 0,2
5	750	1,14	200 + 100	0,3 + 0,15

Tabelle 2:

Laufängen der Geschwindigkeitsprofile aus Abbildung 14
Vergleich zwischen Messwerten und angepassten berechneten Profilen

und erreicht erst ein Stück hinter der Vorderkante seine volle Stärke. Deshalb, und weil die Stromstärke mit $I = 0,28 \text{ A}$ und somit die Lorentzkraft im ersten Versuch etwas zu klein waren, wuchs das Blasiusprofil nach $x = 0$ noch ein wenig an, ehe es durch die Kraft umgeformt werden konnte. In Abbildung 14 ist das berücksichtigt worden, indem die zweite gemessene Kurve mit einem Geschwindigkeitsprofil verglichen wurde, das nicht bei $x = 0$ sondern erst bei $\bar{x} = 0,08$ bzw. $x \approx 50 \text{ mm}$ in das Feld eintrat. Auch mit Lorentzkraft wachsen die Geschwindigkeitsprofile wieder viel langsamer, als theoretisch berechnet. Bei $x = 750 \text{ mm}$ wurde zum Vergleich das exponentielle Profil mit eingezeichnet. Trotz großer Abweichungen vom berechneten Strömungsverlauf wird in Abbildung 14 deutlich, dass sich im Versuch die Geschwindigkeitsprofile asymptotisch dem exponentiellen Profil annähern.

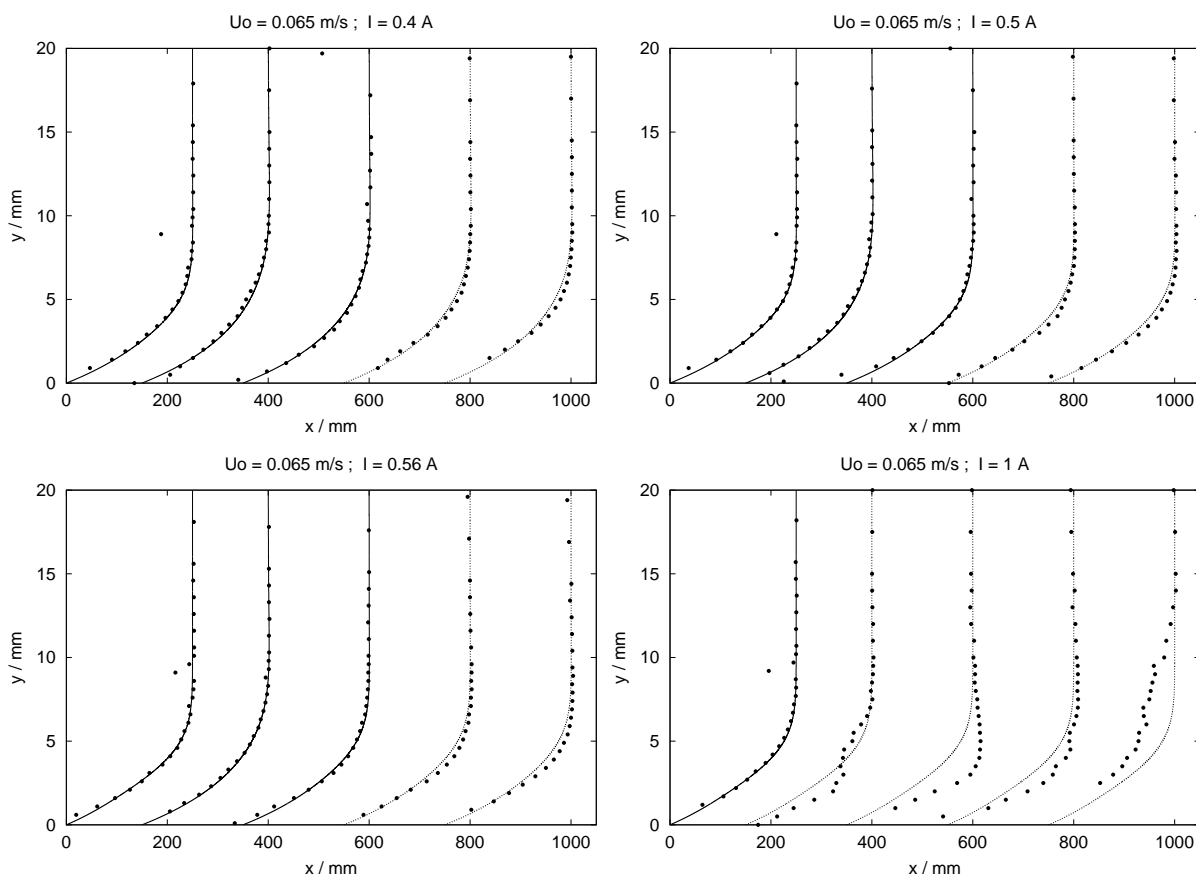
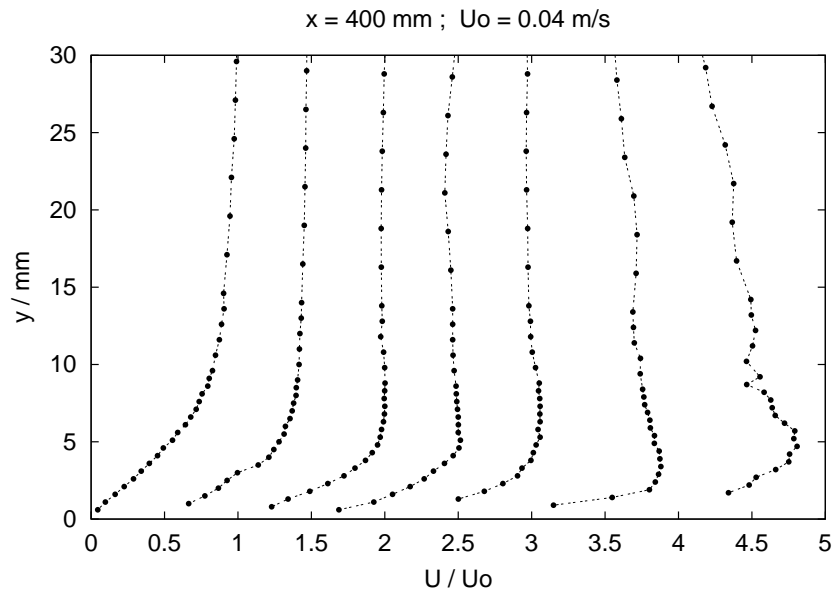


Abbildung 15: Geschwindigkeitsverlauf $u(y)$ bei verschiedenen Stromstärken
 $I = 0,4; 0,5; 0,56$ und $1,0 \text{ A}$ bzw. $Z \approx 0,9; 1,1; 1,2$ und $2,2$

In Abbildung 15 sind die Ergebnisse weiterer vier Messungen aufgetragen. Sobald Z größer als 1 ist, wird der in die Grenzschicht eingebrachte Impuls zu groß und das exponentielle Profil stellt sich nicht mehr ein. Dieser Effekt wurde in einem Versuch, dessen Ergebnisse in Abbildung 16

zu sehen sind, näher untersucht. Die Anströmgeschwindigkeit hatte den Wert $u_\infty = 0,04 \frac{m}{s}$, wobei am Plattenanfang ein Blasiusprofil der Größe $\bar{x}_0 = 0,89$ bzw. $x_0 = 360 \text{ mm}$ entstand. Die notwendige Stromstärke müsste somit $I = 0,28 \text{ A}$ betragen.

Abbildung 16:
Geschwindigkeitsverlauf $u(y)/u_\infty$ an der Stelle $x = 400 \text{ mm}$ bei verschiedenen Stromstärken



zu den Kurven gehörende Stromstärken von links nach rechts:

$$I = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 2,5 \text{ und } 5 \text{ A}$$

Ist die Lorentzkraft zu groß, wird das Fluid der Grenzschicht so stark beschleunigt, dass die Geschwindigkeit in unmittelbarer Wandnähe viel größer wird als in Wandferne. Der Transport innerhalb der Grenzschicht steigt stark an, sodass Fluid von außerhalb nachströmt. Somit ist die Annahme, die Quergeschwindigkeit v sei viel kleiner als u falsch und die Grenzschichtgleichungen (4.1) und (4.2) sind nicht mehr gültig.

Weitere Ergebnisse einer genaueren Untersuchung sind bei T. Weier [5] zu finden.

6 Zusammenfassung

Die Grenzschichtkontrolle mit einer in Strömungsrichtung wirkenden Lorentzkraft funktioniert bei der numerischen Untersuchung sehr gut. In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Größe des Eintrittsprofils mit dem Parameter \bar{x}_0 optimiert werden kann. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist

$$0,6 \leq \bar{x}_{0,opt} \leq 0,7$$

(Gleichung (4.19) auf Seite 8). Um bestmögliche Ergebnisse zu erzielen, sollte beim Versuch berücksichtigt werden, dass das Verhältnis von Grenzschichtdicke zur Eindringtiefe der Kraft stimmt. Dazu die Gleichungen (4.22) und (4.24) auf Seite 9 :

$$a = (0,75 \dots 0,81) \cdot \delta_0 \quad \text{bzw.} \quad \delta_0 = (1,23 \dots 1,33) \cdot a$$

Auch bei der experimentellen Untersuchung konnte die Umwandlung des Blasiusprofils gezeigt werden, auch wenn die Versuchsbedingungen keinen vollständigen Übergang zum exponentiellen Profil zuließen.

A Quelltext

A.1 Lorentzkraft

```

PROGRAM Lorentzkraft
c .....
c  alle Parameter dimensionslos
c  z = pi/(2*a)*z[m]; z = 0..2*pi
c  y = pi/(2*a)*y[m]; y > 0
c  E(y,z) = 1/(2*pi*U0)*E[V/m]
c  B(y,z) = 2*pi/M0*B[T]
c  Fl(y,z) = 1/(s*U0*M0*V)*Fl[N]                                     Elisa Kneisel 2002
c .....
parameter (n = 809)
integer i
double precision ey(n),ez(n),by(n),bz(n),y,z(n),U(n),M(n),dz,l,h
double precision b,pi,fl(n)
complex sig(n),e1,b1,b2,b3,b4,ci

ci = (0d0,1d0)           ! Imaginäre Zahl
pi = 4d0*atan(1d0)      ! pi
b = 1.854074597d0       ! Konstante aus der konformen Abbildung
h = 2d0*pi              ! Magnethöhe
l = 2d0*pi              ! eine Periode von Elektr. & Magneten
y = 0.5d0*pi*0.01d0     ! Wandabstand
dz = 1/(n-1d0)          ! Schrittweite in z-Richtung

do i=1,n
  z(i) = (i-1d0)*l/(n-1d0)
  sig(i) = cmplx(z(i),y)
enddo

open(11, file='E.dat', status='unknown')
open(12, file='B.dat', status='unknown')
open(13, file='Fl.dat', status='unknown')
do i=1,(n-1)/4
  e1 = sqrt(2d0)/(csqrt(ccos(2.*sig(i)))*ci*b)
  ey(i) = -aimag(e1)
  ez(i) = dbble(e1)
  write(11,*) y*2d0/pi, z(i)*2d0/pi, ey(i), ez(i)
enddo
do i=(n+3)/4,(3*n-3)/4
  e1 = sqrt(2d0)/(csqrt(ccos(2.*sig(i)))*ci*b)
  ey(i) = aimag(e1)
  ez(i) = -dbble(e1)
  write(11,*) y*2d0/pi, z(i)*2d0/pi, ey(i), ez(i)
enddo
do i=(3*n+1)/4,n
  e1 = sqrt(2d0)/(csqrt(ccos(2.*sig(i)))*ci*b)
  ey(i) = -aimag(e1)
  ez(i) = dbble(e1)
  write(11,*) y*2d0/pi, z(i)*2d0/pi, ey(i), ez(i)
enddo
do i=1,n
  b1 = ci*(2d0/(1+cexp(ci*(sig(i)+cmplx(-0.75d0*pi,0d0))))-1d0)
  b2 = ci*(2d0/(1+cexp(ci*(sig(i)+cmplx(-0.25d0*pi,h))))-1d0)
  b3 = ci*(2d0/(1+cexp(ci*(sig(i)+cmplx(-0.75d0*pi,h))))-1d0)
  b4 = ci*(2d0/(1+cexp(ci*(sig(i)+cmplx(-0.25d0*pi,0d0))))-1d0)
  by(i) = -aimag(clog(b1*b2/(b3*b4)))
  bz(i) = dbble(clog(b1*b2/(b3*b4)))
  write(12,*) y*2d0/pi, z(i)*2d0/pi, by(i), bz(i)
  fl(i) = ey(i)*bz(i)-ez(i)*by(i)
  write(13,*) y*2d0/pi, z(i)*2d0/pi, fl(i)
enddo
write(11,*) '# y, z, Ey(y,z), Ez(y,z)'
write(12,*) '# y, z, By(y,z), Bz(y,z)'
write(13,*) '# y, z, Fl(y,z)'
close(11)
close(12)
close(13)
END

```

```

do i=1,ny
  g(i) = u(i)**2d0
  if (u(i).le.0.99d0) then
    d0=y(i) ! Grenzschichtdicke berechnen
  endif
enddo
d1 = ymax-integral(u,dy,ny) ! Verdrängungsdicke berechnen
d2 = ymax-d1-integral(g,dy,ny) ! Impulsverlustdicke berechnen
call Ableitung2(y,u,ny,d2u)

open (ll, file='x0.dat', status='unknown')
do i=1,ny
  write(ll,*) y(i), u(i), v(i), d2u(i)
enddo
write(ll,*) d0,d1,d2
write(ll,*) '# d0, d1, d2'
write(ll,*) '# Blasiusprofil bei x0 = ',x0
write(ll,*) '# y(i) u(i) v(i) d2u(i) mit i=1 ..',ny
close (ll)
write(*,*) 'x0.dat' Blasiusprofil bei x=0'

c ---Gleichungssystem lösen-----
do j=1,nx ! x-Richtung

do i=2,ny-1 ! Koeffizienten für den Thomas-Algorithmus
  a(i) = (-2d0*v(i)+valt(i)-2d0/dy)*dx/dy
  b(i) = 6d0*u(i)-3d0*ualt(i)+4d0*dx/dy**2d0
  c(i) = (2d0*v(i)-valt(i)-2d0/dy)*dx/dy
  d(i) = (4d0*u(i)-ualt(i))*(2d0*u(i)-ualt(i))+2d0*dx*exp(-y(i))
enddo
gamma(1) = 0d0 ! Vorwärtssubstitution
delta(1) = 0d0
do i=2,ny-1
  gamma(i) = c(i)/(b(i)-a(i)*gamma(i-1))
  delta(i) = (d(i)-a(i)*delta(i-1))/(b(i)-a(i)*gamma(i-1))
enddo

uneu(ny) = 1d0 ! Rückwärtssubstitution
do i=ny-1,2,-1
  unneu(i) = delta(i)-gamma(i)*uneu(i+1)
enddo
uneu(1) = 0d0

vneu(1) = 0d0 ! v(y) aus der Kontinuitätsgleichung
do i=2,ny
  vneu(i) = vneu(i-1)-(3d0*(uneu(i)+uneu(i-1))-
& 4d0*(u(i)+u(i-1))+ualt(i)+ualt(i-1))*dy/(4d0*dx)
enddo

do i=1,ny
  ualt(i) = u(i)
  u(i) = unneu(i)
  valt(i) = v(i)
  v(i) = vneu(i)
enddo

do i=1,ny ! Grenzschichtparameter berechnen
  g(i) = unneu(i)**2d0
  if (unneu(i).le.0.99d0) then
    d0=y(i)
  endif
enddo
d1 = ymax-integral(uneu,dy,ny)
d2 = ymax-d1-integral(g,dy,ny)

call Ableitung2(y,uneu,ny, d2u)

```

```

PROGRAM Geschwindigkeitsprofile
c -----
c Alle Parameter dimensionslos:
c x = visc*alpha^2/u0*x[m]
c y = alpha*y[m]
c u = u[m]/u0
c v = v[m]/(alpha*visc)
c Differentialgleichungen:
c u*du/dx + v*du/dy = d^2u/dy^2+exp(-y)
c du/dx + dv/dy = 0
c -----
parameter (nyq = 12001) ! Werte in blasius.dat
parameter (ny = 20001) ! Schritte in y-Richtung
parameter (nx = 1000) ! Schritte in x-Richtung
integer i,j,ny1
double precision x0,dx,ymax,dy,x1,xend
double precision integral,d0,d1,d2,d2u(ny),g(ny)
double precision yqalt(nyq),uqalt(nyq),vqalt(nyq)
double precision ualt(ny), valt(ny)
double precision yq(nyq),uq(nyq),vq(nyq)
double precision y(ny), u(ny), v(ny)
double precision uex(ny),vex(ny),uneu(ny),vneu(ny)
double precision a(ny),b(ny),c(ny),d(ny)
double precision gamma(ny),delta(ny)

x0 = 0.65d0 ! Anfangsbedingung x0
dx = 1d-3 ! Schrittweite in x-Richtung
ymax = 20d0 ! max. Wandabstand
x1 = 0.05d0 ! Stelle, an der Datei ausgegeben wird
xend = 0.2d0 ! Stelle, an der Datei ausgegeben wird

write(*,*) 'Anfangsbedingung x0=' ,x0
write(*,*) 'x=0 ..(' ,dx,')..' ,nx*dx
write(*,*) 'y=0 ..(' ,ymax/(ny-1),')..' ,ymax
dy = ymax/(ny-1d0)
do i=1,ny
  y(i) = dy*(i-1d0)
enddo

c ---Daten des Blasiusprofils einlesen-----
call blasius(x0-dx,nyq,uqalt,vqalt,yqalt)
call blasius(x0 ,nyq,uq ,vq ,yq)
do i=1,nyq ! Uo = 1
  uqalt(i) = uqalt(i)/uqalt(nyq)
  uq(i) = uq(i)/uq(nyq)
enddo
write(*,*) 'Wertebereich überprüfen ...'
if (yqalt(nyq).ge.ymax) then
  write(*,*) 'Nicht erfolgreich!'
  write(*,*) 'ymax muß größer als ',1d-2*int(1d2*yqalt(nyq)+1d0),
& ' sein!'
  goto 13
endif
write(*,*) 'Erfolgreich.'
ny1 = 1+(ny-1)*yqalt(nyq)/ymax
call splint(yqalt,uqalt,nyq,y,ny1,ualt)
call splint(yqalt,vqalt,nyq,y,ny1,valt)
call splint(yq ,uq ,nyq,y,ny1,u)
call splint(yq ,vq ,nyq,y,ny1,v)
do i=ny1+1,ny
  ualt(i) = ualt(ny1)
  valt(i) = valt(ny1)
  u(i) = u(ny1)
  v(i) = v(ny1)
enddo

```

```

SUBROUTINE splint(xa,ya,na,x,n,y)
integer i,k,kh,kl
double precision xa(na),ya(na),x(n),y2a(na),y(n),dx,h,a,b
call Ableitung2(xa,ya,na,y2a)
do i=1,n
  kl = 1
  kh = na
1  if (kh-kl.gt.1) then
    k = (kl+kh)/2
    if (xa(k).gt.x(i)) then
      kh = k
    else
      kl = k
    endif
    goto 1
  endif
  h = xa(kh)-xa(kl)
  a = (xa(kh)-x(i))/h
  b = (x(i)-xa(kl))/h
  y(i) = a*ya(kl)+b*ya(kh)+h**2d0*((a**3d0-a)*y2a(kl)
& +(b**3d0-b)*y2a(kh))/6d0
enddo
RETURN
END
-----
c 2. Ableitung für die Splineinterpolation
-----
SUBROUTINE Ableitung2(x,y,n,y2)
integer i
double precision x(n),y(n),y2(n),dx
dx = (x(n)-x(1))/(n-1d0)
do i=2,n-1
  y2(i) = (y(i+1)-2d0*y(i)+y(i-1))/dx**2d0
enddo
y2(1) = (y2(3)*(x(1)-x(2))+y2(2)*(x(3)-x(1)))/(x(3)-x(2))
y2(n) = (y2(n-2)*(x(n)-x(n-1))+y2(n-1)*(x(n-2)-x(n)))/
& (x(n-2)-x(n-1))
RETURN
END
-----
c Exponentielles Profil
-----
SUBROUTINE expon(y,n,u,v)
integer i
double precision y(n),u(n),v(n)
do i=1,n
  u(i) = 1d0-exp(-y(i))
  v(i) = 0d0
enddo
RETURN
END
=====
c Integration nach Simpson
=====
double precision FUNCTION integral(y,dx,n)
integer i
double precision y(n),dx
integral = (y(1)+y(n))/2d0
do i=2,n-1
  integral = integral+y(i)
enddo
do i=1,int((n-1d0)/2d0)
  integral = integral+y(2*i)
enddo
integral = 2d0*dx*integral/3d0
RETURN
END

```

```

if (j.eq.int(x1/dx)) then
  open (12, file='x1.dat', status='unknown')
  do i=1,ny
    write (12,*) y(i), uneu(i), vneu(i), d2u(i)
  enddo
  write(12,*) d0,d1,d2
  write(12,*) '# d0,d1,d2'
  write(12,*) '# Profil bei x = ',x1,' ; x0=',x0
  write(12,*) '# y(i) u(i) v(i) d2u(i) mit i=1 ..',ny
  close (12)
  write(*,*)' "x1.dat" Profil bei x1=',x1
endif

enddo ! j = 1..nx

call expon(y,ny, uex,vex)
open (19, file='expon.dat', status='unknown')
do i=1,ny
  write(19,*) y(i), uex(i), vex(i), (uex(i)-1d0)
enddo
write(19,*) log(1d2),1d0,5d-1
write(19,*) '# d0,d1,d2'
write(19,*) '# exponentielles Profil'
write(19,*) '# y(i) u(i) v(i) d2u(i) mit i=1 ..',ny
close(19)
write(*,*)' "expon.dat" exponentielles Profil'

do i=1,ny ! Grenzschichtparameter berechnen
  g(i) = uex(i)**2d0
  if (uex(i).le.0.99d0) then
    d0=y(i)
  endif
endif
enddo
d1 = ymax-integral(uex,dy,ny)
d2 = ymax-d1-integral(g,dy,ny)

13 continue
write(*,*)
END
*****
-----
c Daten des Blasiusprofils einlesen
-----
SUBROUTINE blasius(x,n,u,v,y)
integer i
double precision eta(n),f(n),u(n),v(n),y(n),x,deta
open (10, file='blasius.dat', status='old')
do i=1,n
  read (10,*) eta(i), f(i)
enddo
close (10)
deta = (eta(n)-eta(1))/(n-1d0)
do i=2,n-1
  u(i) = (f(i+1)-f(i-1))/(2d0*deta)
enddo
u(n) = u(n-1)
do i=1,n
  v(i) = (eta(i)*u(i)-f(i))/sqrt(2d0*x)
  y(i) = sqrt(2d0*x)*eta(i)
  u(i) = u(i)/u(n)
enddo
RETURN
END
-----
c Splineinterpolation
-----

```

Literatur

- [1] V.V. Avilov: *Electric and magnetic fields for the Riga plate*; FZR Interner Bericht
- [2] C.A.J. Fletcher: *Computational Techniques for Fluid Dynamics II*; Springer
- [3] G. Mutschke: *VDI-Verbundprojekt: Kontrolle der nichtlinearen Dynamik von Strömungsgrenzschichten durch elektromagnetische Kräfte, Teilvorhaben Numerik und Testkörperbau*; VKZ: 13N7134-2, Abschlussbericht Mai 2000
- [4] H. Schlichting: *Grenzschicht-Theorie*; Springer
- [5] T. Weier: *Elektromagnetische Strömungskontrolle mit wandparallelen Lorentzkräften in schwach leitfähigen Fluiden*; Dissertation in Vorbereitung