

FZR-205
Januar 1998

Archiv-Ex.:

K. Meyer, F. Hollstein

**Analytisches Modell zur Berechnung
der Übertragungsfunktionen für das
Neutronenflußrauschen
in WWER-440-Reaktoren
bei stochastischen Schwingungen der
Regelementunterteile**

Herausgeber:
FORSCHUNGSZENTRUM ROSSENDORF
Postfach 51 01 19
D-01314 Dresden
Telefon (03 51) 26 00
Telefax (03 51) 2 69 04 61

Als Manuskript gedruckt
Alle Rechte beim Herausgeber

Analytical Model to Calculate the Transfer Functions of Neutron Noise caused by Random Pendulum Motions of a VVER-440 Control Element

by

Klaus Meyer and Frank Hollstein

Contents

1. Introduction
2. Reactor model and noise sources
3. Transfer functions
4. Numerical results
5. Conclusions

Literature

- Appendix 1: Noise source scaling factor for the One-Group-Approximation
- Appendix 2: Calculation of the transfer functions
- Appendix 3: Figures

SUMMARY

Control elements of VVER-440 type reactors consist of absorber and fuel parts. They can approximately be considered as spatial double pendulums. The length of both parts is equal to the height of the core. In the present paper the main interest is directed to the neutron noise due to random vibrations of the fuel parts (lower parts of the pendulums). It is assumed, that the fuel parts of all control elements are completely inserted into the core. A homogeneous cylindrical reactor model is used to describe the neutron flux. It is also assumed, that the control elements can be excited to flow induced random 3D transverse oscillations and pendulum motions. The transfer functions for the considered two kinds of control element motions were calculated by means of the Prompt-Response-Approximation for the Modified-One-Group-Diffusion-Equation. Using numerical results, studies have been made to clear up the contribution of the random pendulum motions to the neutron noise.

Analytisches Modell zur Berechnung der Übertragungsfunktionen für das Neutronenflußrauschen in WWER-440-Reaktoren bei stochastischen Schwingungen der Regelementunterteile

Klaus Meyer und Frank Hollstein

Inhalt

1.	Einleitung	2
2.	Reaktormodell und Rauschquelle	3
3.	Übertragungsfunktionen	6
4.	Numerische Resultate	10
5.	Schlußfolgerungen	12
	Literatur	14
	Anhang 1: Quellstärkefaktor für die Eingruppennäherung	16
	Anhang 2: Berechnung der Übertragungsfunktionen	20
	Anhang 3: Abbildungen	24

Zusammenfassung

Die Regelemente in WWER-440 Reaktoren sind als räumliche Doppelpendel mit Absorberteil (Oberteil) und Brennstoffteil (Unterteil) konstruiert. Gegenstand der Untersuchungen ist das durch stochastische Schwingungen der Regelementunterteile induzierte Neutronenflußrauschen. Vorgestellt wird ein analytisch lösbares 3D-Modell zur Berechnung der Übertragungsfunktionen in einem homogenen Zylinderreaktor. Die Unterteile werden dabei als vollständig in die Spaltzone eingetaucht betrachtet und können innerhalb ihrer Führungskanäle zu strömungsinduzierten Transversal- und Pendelschwingungen angeregt werden. Die stochastischen Bewegungen führen zu einer ortsabhängigen Veränderung der Wasserspaltbreite in den Führungskanälen und bewirken damit Schwankungen der effektiven makroskopischen Wirkungsquerschnitte. Die zeitlichen Änderungen der Wirkungsquerschnitte innerhalb der streng lokalisierten Quellgebiete repräsentieren im neutronenphysikalischen Modell die Quellen des Neutronenflußrauschens. Die Berechnung der Quellen erfolgt auf der Grundlage der Zweigruppen-Diffusionsgleichungen. Die Ausbreitung der Quellsignale im Reaktor wird in der Prompt-Response-Approximation für die Eingruppen-Gleichung beschrieben. Die Kopplung des Zweigruppen-Quellmodells an das Eingruppen-Übertragungsmodell ist im Sinne der modifizierten Eingruppen-Diffusionsnäherung behandelt worden. Anhand numerischer Berechnungen werden die Übertragungsfunktionen der Spaltzone insbesondere unter dem Gesichtspunkt der Klärung des Beitrages der stochastischen Pendelschwingungen diskutiert.

Prof. Dr. rer. nat. habil. K. Meyer, Zittau

Dr.-Ing. F. Hollstein, Institut für Sicherheitsforschung im Forschungszentrum Rossendorf

1. Einleitung

In Reaktoren vom Typ WWER-440 sind die Regelelemente als räumliche Doppelpendel mit Absorberteil (Pendeloberteil) und Brennstoffteil (Pendelunterteil) gefertigt. Beide Teile haben die gleiche Länge (Corehöhe, ca. 246cm). In ihren geometrischen Abmessungen sind sie identisch mit den insgesamt 312 hexagonalen Brennelementen der Spaltzone.

Die 37 Regelelemente sind zur Leistungssteuerung in sechs Regelgruppen zusammengefaßt und können in ihren Führungskanälen gruppenweise wohldefiniert vertikal bewegt werden. Ein Führungskanal wird dabei aus sechs angrenzenden Brennelementen gebildet. Zwischen der Führungskanaloberfläche und dem Regelelement befindet sich ein Spalt für die Kühlmittelströmung, dessen mittlere Breite etwa 0.1 cm beträgt.

Das Kühlmittel regt bei einer Strömungsgeschwindigkeit von ca. 5 .. 6 m/sec die Regelelemente zu stochastischen mechanischen Schwingungen an. Als Ursachen kommen Druckschwankungen durch Wirbelablösungen, instabile Strömungsverzweigung oder Pulsation des Drucks der Hauptkühlmittelpumpen in Betracht /Bastl 72/. Bei WWER-440 Reaktoren können zusätzlich abnormal große Bewegungsamplituden des Reaktorschachts bzw. des Spaltzonenkorbes zur Schwingungsanregung beitragen. Wie in /Liewers 87, 89/ experimentell nachgewiesen wurde, kommt es in diesem Fall zu kollektiven Bewegungen aller Regelelemente.

Da die Regelelemente funktionsbedingt nicht an ihrem unteren Ende arretiert sind, führen die strömungsinduzierten Kräfte zu Anschlägen an die Wände der Führungskanäle /Grunwald 78, Altstadt 93/. Die Folgen können Abrieb an den Hüllen der Corematerialien oder Verklebungen von Regelelementen sein.

Für die Schadensfrüherkennung ist die Ermittlung der Anschlaghäufigkeit, des Anschlagortes und der auftretenden Kräfte am Regelelement und den benachbarten Brennelementen von Bedeutung /Hennig 84/. Nach dem heutigen Erfahrungsstand ist dazu die gleichzeitige Analyse mechanischer und nuklearer Signale notwendig.

Bei WWER-440 Reaktoren kann die Anschlaghäufigkeit von stark angeregten Regelelementen durch Messung des Körperschalls an den Standrohren für die Antriebsstangen gemessen und die wirkenden Kräfte qualitativ abgeschätzt werden. Zur Lokalisierung des Anschlagortes reichen die Körperschallsignale allein nicht aus. Die zusätzliche Nutzung der im Neutronenflußrauschen enthaltenen Informationen ist jedoch infolge der Überlagerung verschiedener Quellsignale erschwert. In /Grunwald 78, Liewers 85/ ist deshalb ein Verfahren der korrelierten Signalanalysetechnik entwickelt worden, das einen Regelelementanschlag als Triggersignal nutzt und unter der Voraussetzung unkorrelierter Schwingungen die Separation der von einem einzelnen Regelelement erzeugten Neutronenflußschwankungen vom gesamten Rauschsignal eines Neutronendetektors erlaubt. Damit ist prinzipiell die Möglichkeit der Rekonstruktion von mittleren Trajektorien stark angeregter Regelelemente und folglich auch derer mittlerer Anschlagorte gegeben /Barthel 84, Liewers 85/. Voraussetzung für die Rekonstruktion ist die Kenntnis der Übertragungsfunktionen der Spaltzone.

In der vorliegenden Arbeit wird ein 3D-Modell zur Berechnung der Übertragungsfunktionen vorgestellt. Da die Langzeitsteuerung eines WWER-440 vorrangig über den Borsäureanteil des Moderators erfolgt, sind bei WWER-440 Reaktoren im Normalbetrieb die Absorberteile von 30 der 37 Regelelemente vollständig aus der Spaltzone gezogen. Die Eintauchtiefe der restlichen 7 Regelelemente (Regelgruppe 6) ist zumeist auf das obere Drittel der Spaltzone begrenzt. Die endliche Eintauchtiefe der Regelgruppe 6 ignorierend, kann somit vereinfachend von einer

Spaltzonenkonfiguration mit voll eingetauchten Brennstoffteilen ausgegangen werden. Für diesen Fall ist eine Reihe von 2D-Modellansätzen für den homogenen Zylinderreaktor bekannt /Paszit 80, Lee 83, Meyer 82, Paszit 84, Barthel 85, Meyer 91/. Sie grenzen sich gegeneinander hauptsächlich durch unterschiedliche Annahmen zur räumlichen Struktur der örtlich streng lokalisierten Rauschquelle, durch verschiedene Näherungen bezüglich der Frequenzabhängigkeit für das Übertragungsmodell und hinsichtlich der Anzahl berücksichtigter Neutronengruppen ab. Bekannt sind weiterhin 2D-Untersuchungen anhand diskreter Reaktormodelle, die die heterogene Brennstoffzusammensetzung realer Spaltzonenkonfigurationen zu berücksichtigen gestatten /Collatz 81 und 91, Lucas 92/.

In allen genannten Arbeiten wird von der Annahme ausgegangen, daß die Auslenkungen eines Regelelements für Incore-Detektoren gleicher Höhenposition als achsparallel angesehen werden können. Eine Einschätzung des damit verbundenen Fehlers ist bisher nirgends diskutiert worden.

Für den hier betrachteten Fall voll eingetauchter Brennstoffteile in einem endlichen, homogenen Zylinderreaktor kann jedoch ohne Beeinträchtigung der Allgemeingültigkeit die Beschränkung auf achsparallele Schwingungen problemlos fallen gelassen werden. In der vorliegenden Arbeit wird für die Schwingungen der Regelement-Unterteile eine überlagerte Bewegung, bestehend aus einer stochastischen Translation in der r - φ Ebene (achsparallele Schwingung) und einer zufälligen Pendelbewegung um den Unterteilschwerpunkt, angenommen. Damit sind die zwei wesentlichen Bewegungsformen eines WWER-440-Regelements im Modell erfaßt. Die Reaktorphysik wird auf der Grundlage einer Störungstheorie erster Ordnung für die Modifizierte-Eingruppen-Diffusions-Gleichung in der Prompt-Response-Approximation behandelt. Die unmittelbaren Quellen für das Neutronenflußrauschen sind Schwankungen der Wirkungsquerschnitte im Wasserspalt des Führungskanals. Sie sind im Diffusionsmodell als Flächenquellen berücksichtigt. Dabei wird bezüglich der z -Koordinate eine Proportionalität zwischen den differentiellen achsparallelen Regelementauslenkungen und den resultierenden differentiellen Änderungen für die Wasserspalt-Wirkungsquerschnitte vorausgesetzt. Die Berechnung des Proportionalitätsfaktors erfolgt in bekannter Weise auf der Basis eines Zweigruppen-Ansatzes für das betrachtete Quellgebiet /Kunze 85/.

Anhand numerischer Berechnungen werden die Übertragungsfunktionen der Spaltzone diskutiert. Dabei steht insbesondere die Klärung des Beitrages der Pendelbewegungen zum Neutronenflußrauschen im Vordergrund.

2. Reaktormodell und Rauschquelle

Betrachtet wird ein homogener Zylinderreaktor mit dem extrapolierten Radius R und der Höhe H . Zur Beschreibung des Neutronenflußrauschens soll die Modifizierte-Eingruppen-Diffusions-Gleichung in der Prompt-Response-Approximation dienen:

$$\Delta \delta\Phi(r, \varphi, z, t) + \frac{k_{00}(1-\beta)-1}{M^2} \delta\Phi(r, \varphi, z, t) + \delta B^2(r, \varphi, z, t) \Phi_0(r, \varphi, z) = 0 \quad (1)$$

$\delta\Phi$ bezeichnet dabei die Schwankungen des schnellen Neutronenflusses, Φ_0 die stationäre, schnelle Flußverteilung, k_{00} den (kritischen) unendlichen Multiplikationsfaktor, M^2 die Migrationsfläche, β den relativen Anteil verzögerter Neutronen, Δ den Laplace-Operator und δB^2 eine weiter unten genauer zu spezifizierende, zeit- und ortsabhängige Störung des Materialbucklings. Die Zylinderkoordinaten sind wie üblich durch r , φ und z gekennzeichnet, t steht für die Zeitkoordinate.

Schwingungen der Regelementunterteile führen zu Änderungen der effektiven Wirkungsquerschnitte im Wasserspaltbereich. Aufgrund der geringen radialen Ausdehnung dieses Gebietes kann es mit Hilfe einer Dirac'schen δ -Funktion beschrieben werden. Zur Vereinfachung der mathematischen Beziehungen wird ein zweites Zylinderkoordinatensystem (ρ , Ψ , z)

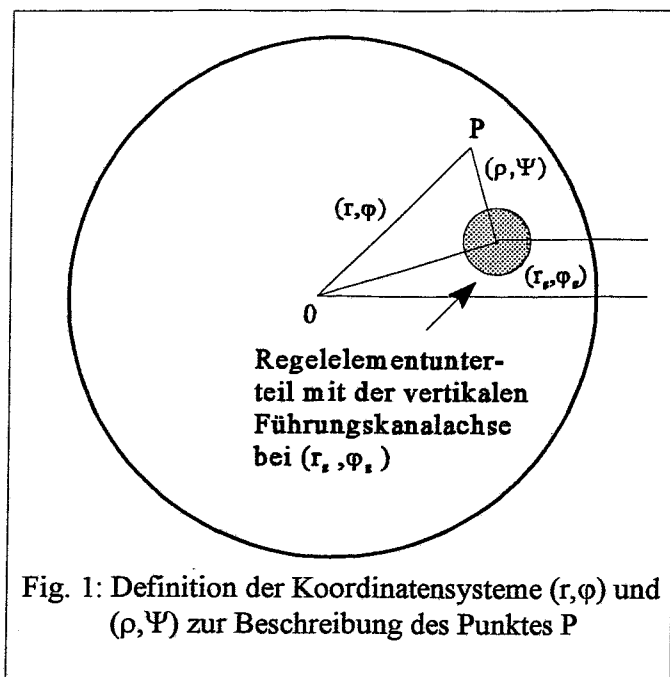


Fig. 1: Definition der Koordinatensysteme (r, φ) und (ρ, Ψ) zur Beschreibung des Punktes P

entsprechend Fig. 1 eingeführt. Die Änderung des Materialbucklings im Quellgebiet läßt sich damit (siehe auch Anhang 1) durch

$$\delta B^2 = \frac{c}{M^2} \delta(\rho - R_B) \delta R(t, z) \cos(\Psi - \psi(t, z) - \varphi_s) \quad (2)$$

beschreiben mit R_B als Regelementradius. δR stellt den Betrag einer stochastischen Auslenkung des Regelements in eine sich ebenfalls zufällig einstellende Richtung ψ dar. Die Position der vertikalen Achse des Führungskanals im Koordinatensystem (r, φ) ist durch (r_s, φ_s) gekennzeichnet. Der Quellstärkefaktor c (Gl. 3, zur Begründung siehe Anhang 1)

$$c = - \frac{\Sigma_r^W}{\Sigma_r^B} - \left(\frac{\Sigma_a^W}{\Sigma_a^B} - \frac{\Sigma_{12}^W}{\Sigma_{12}^B} \right) (1 - k_1(1 - \beta)) \quad (3)$$

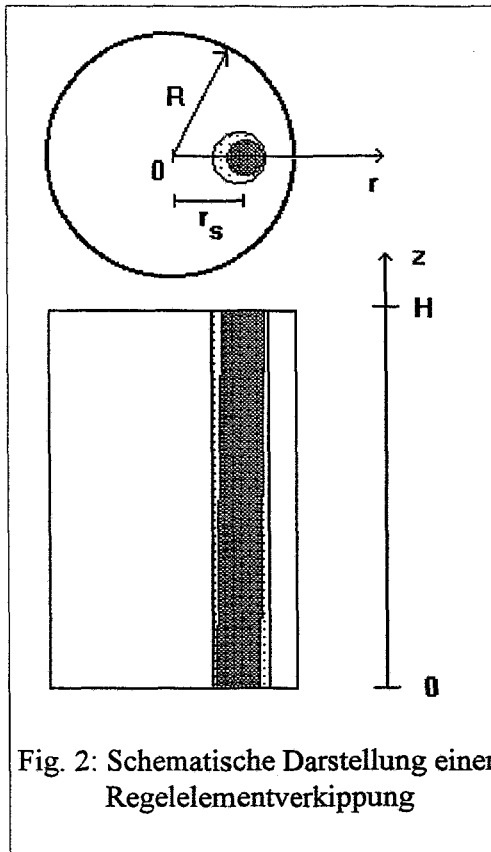


Fig. 2: Schematische Darstellung einer Regelementverkipfung

setzt sich aus den relativen Wirkungsquerschnitten im (W)asserspalt und im (B)rennstoffteil des Regelements zusammen. Dabei stehen die Indizes "r" für Removal, "a" für Absorption und "12" für Transfer. Mit k_1 ist der schnelle Multiplikationsfaktor bezeichnet.

Der Quellstärkefaktor c läßt sich auf der Basis einer Zweigruppenbetrachtung /Kunze 85/ berechnen und hängt in erster Linie von der Borsäurekonzentration im Moderator ab. Tendenziell nimmt der Betrag des Quellstärkefaktors zum Zyklusende hin zu. Dies ist sowohl theoretisch /Kunze 85, Lucas 92, Hollstein 95/ als auch experimentell belegt /Kunze 85, Barz 89/. Nach /Lucas 92, Hollstein 95/ kann es bei heterogenen Reaktorkonfigurationen kurz nach Beginn des Zyklus' zu einem Vorzeichenwechsel für den Quellstärkefaktor kommen.

Die stochastischen Bewegungstrajektorien eines Regelements infolge strömungsinduzierter Anregungen lassen sich für den hier behandelten Fall voll eingetauchter Regelementunterteile im wesentlichen aus der Überlagerung achsparalleler Verschiebungen und zufälliger Pendelschwingungen um den Schwerpunkt des Unterteils beschreiben. Mögliche

Torsionsschwingungen und mechanische Deformationen des Doppelpendels sollen ausgeschlossen sein. Die Trajektorie läßt sich demnach durch den Ansatz

$$\delta R(t,z) \cos(\Psi - \psi(t,z) - \varphi_r) = (\delta R_0(t) + \delta R_1(t) \left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right)) \cos(\Psi - \psi(t) - \varphi_r) \quad (4)$$

bezüglich ihrer z -Abhängigkeit linearisieren mit δR_0 und δR_1 als Zufallsfunktionen. Dabei sind die in Fig. 2 dargestellten geometrischen Verhältnisse zugrundegelegt worden. Mit r_s ist in Fig. 2 die weiter unten benötigte Exzentrizität der Führungskanalachse gekennzeichnet.

Der in Gl. 1 benötigte stationäre Fluß ist vom Azimutwinkel φ unabhängig und durch

$$\Phi_0(r,z) = \overline{\Phi}_0 J_0(\omega_0 \frac{r}{R}) \sin(\frac{\pi z}{H}) \quad (6)$$

gegeben mit $\overline{\Phi}_0$ als Skalierungsfaktor und $\omega_0=2.4048$ als kleinste positive Nullstelle der Besselfunktion $J_0(x)$.

3. Übertragungsfunktionen

Zur Lösung von Gl. 1 werden axiale Eigenfunktionen $v_n(z)$ verwendet, die ein vollständiges Orthogonalsystem bilden

$$v_n(z) = \sin(\frac{n\pi z}{H}) \quad n=1,2,3,\dots \quad (7)$$

mit dem Skalarprodukt

$$\int_0^H dz v_n(z)v_m(z) = \frac{H}{2} \delta_{nm} \quad (8)$$

und δ_{mn} als Kroneckersymbol. Damit kann $\delta\Phi$ durch

$$\delta\phi(r,\varphi,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r,\varphi,t) v_n(z) \quad (9)$$

entwickelt werden. Die Eigenfunktionen $v_n(z)$ genügen Gl. 10

$$\frac{d^2}{dz^2} v_n(z) + (n\frac{\pi}{H})^2 v_n(z) = 0 \quad (10)$$

Zur Bestimmung der partiellen Differentialgleichungen für die Berechnung der Funktionen $u_n(r,\varphi,t)$ treten neben Gl. 8 noch folgende Integrale über den Quellterm von Gl. 1 auf:

$$\begin{aligned}
 & 0 \qquad n = 1,3,5\dots \\
 & \int_0^H dz \left(z - \frac{H}{2}\right) \sin\left(\pi \frac{z}{H}\right) v_n(z) = \qquad (11) \\
 & -4n \frac{H^2}{\pi^2} \frac{1}{(1-n^2)^2} \qquad n = 2,4,6\dots
 \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Funktionen $u_n(r, \varphi, t)$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) u_1 + \left(\frac{k_{00}(1-\beta)-1}{M^2} - \left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right) u_1 = \\
 & -\frac{c}{M_2} \delta(\rho - R_B) \overline{\Phi}_0 J_0\left(\omega_0 \frac{r}{R}\right) \delta R_0(t) \cos(\Psi - \psi(t) - \varphi_s) \qquad (12)
 \end{aligned}$$

für $n=1$ und

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) u_n + \left(\frac{k_{00}(1-\beta)-1}{M^2} - \left(n \frac{\pi}{H}\right)^2\right) u_n = \\
 & \frac{c}{M_2} \delta(\rho - R_B) \overline{\Phi}_0 J_0\left(\omega_0 \frac{r}{R}\right) \frac{4n}{\pi^2(1-n^2)^2} \delta R_1(t) \cos(\Psi - \psi(t) - \varphi_s) \qquad (13)
 \end{aligned}$$

für $n=2, 4, 6 \dots$ Die Gl. 12 beschreibt erwartungsgemäß den Fall achsparalleler Schwingungen, während in Gl. 13 ausschließlich der stochastische Pendelanteil in den Quellen enthalten ist. Da die Quellterme für die Funktionskomponenten u_n in Gl. 13 mit dem Faktor $1/n^3$ konvergieren, brauchen für die numerische Berechnung von $\delta\phi$ nach Gl. 9 nur wenige axiale Eigenfunktionen berücksichtigt werden.

Zur Lösung der Gl. 12 bzw. 13 werden die Ansätze

$$u_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^n J_m(\mu_n r) e^{im(\varphi - \varphi_s)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m^n Y_m(\mu_n \rho) e^{im(\Psi - \varphi_s)} \qquad (14)$$

für das Gebiet außerhalb des Führungskanals ($\rho > R_B$) und

$$u_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^n J_m(\mu_n \rho) e^{im(\Psi - \varphi_s)} \qquad (15)$$

für das Führungskanalgebiet ($\rho < R_B$) verwendet. Die Neumann-Funktionen kommen wegen ihrer Singularität bei $\rho=0$ in Gl. 15 nicht vor. μ_n ist durch Gl. 16

$$\mu_n^2 = \frac{k_{00}(1-\beta)-1}{M^2} - \left(n\frac{\pi}{H}\right)^2 \quad (16)$$

definiert. A_m^n , a_m^n und b_m^n stehen für beliebige Integrationskonstanten. Sie sind durch die Randbedingungen bei $r=R$ und die Übergangsbedingungen bei $\rho=R_B$ festgelegt und im Anhang 2 explizit dargestellt. Für die numerische Berechnung von u_n ist es notwendig, die Anzahl der singulären Funktionen in Gl. 14 zu begrenzen. Bei der Reihenentwicklung werden mindestens die Funktionen $e^{i\varphi}$, $e^{0\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ benötigt. Hier belassen wir es daher bei der Berücksichtigung der Neumann-Funktionen erster und nullter Ordnung ($Y_{-1} = -Y_1$).

Nach einer Aufspaltung der zwei Zufallsfunktionen $\delta R_0(t)$ und $\delta R_1(t)$ in die zueinander orthogonalen Komponenten $\delta \xi_r^{0/1}(t)$ und $\delta \xi_\varphi^{0/1}(t)$ entsprechend

$$\delta \xi_r^{0/1}(t) = \delta R_{0/1}(t) \cos(\psi(t) - \varphi_s) \quad (17)$$

und

$$\delta \xi_\varphi^{0/1}(t) = \delta R_{0/1}(t) \sin(\psi(t) - \varphi_s) \quad (18)$$

können die Entwicklungsfunktionen u_n aus Gl. 14 in kompakter Form dargestellt werden:

$$u_n(r, \varphi, t) = -c \frac{\pi R_B^2}{4 M^2} \overline{\Phi_0} \left(\delta \eta_r^n(t) \frac{\partial}{\partial r_s} + \delta \eta_\varphi^n(t) \frac{1}{r_s} \frac{\partial}{\partial \varphi_s} \right) F_n(r, \varphi, r_s, \varphi_s) \quad (19)$$

mit

$$\delta \eta_{r/\varphi}^n(t) = \begin{cases} \delta \xi_{r/\varphi}^0(t) & n=1 \\ \delta \xi_{r/\varphi}^1(t) \frac{4n}{\pi^2(1-n^2)^2} & n=2,4,6\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (20)$$

und

$$F_n = J_0\left(\omega_0 \frac{r_s}{R}\right) \left(Y_0(\mu_n \rho(r, r_s, \varphi, \varphi_s)) - \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{Y_m(\mu_n R)}{J_m(\mu_n R)} J_m(\mu_n r_s) J_m(\mu_n r) \cos(m(\varphi - \varphi_s)) \right) \quad (21)$$

wobei $\epsilon = 1$ für $m=0$ und $\epsilon = 2$ für $m>0$ ist. Gl. 19 gilt unter der Voraussetzung $|\mu_n R_B| \ll 1$. Für den Spezialfall des zentralen Regelelements ($r_s=0$) ergibt sich

$$u_n(r, \varphi, t) = -c \frac{\pi}{4} \frac{\overline{\Phi}_0}{M^2} \frac{R_B^2}{J_1(\mu_n R)} \frac{\mu_n}{J_1(\mu_n R)} (Y_1(\mu_n r) J_1(\mu_n R) - Y_1(\mu_n R) J_1(\mu_n r)) (\delta\eta_r^n(t) \cos(\varphi) + \delta\eta_\varphi^n(t) \sin(\varphi)) \quad (22)$$

und für den Fall des zentralen Detektors ($r=0$)

$$\begin{aligned} \delta u_n(r_s, t) = & -\frac{c}{M^2} \frac{\overline{\Phi}_0}{4} \frac{R_B^2}{J_0(\mu_n R)} \delta\eta_r^n(t) \\ & \left(\frac{\omega_0}{R} J_1\left(\omega_0 \frac{r_s}{R}\right) (Y_0(\mu_n r_s) J_0(\mu_n R) - J_0(\mu_n R) Y_0(\mu_n r_s)) - \right. \\ & \left. \mu_n J_0\left(\omega_0 \frac{r_s}{R}\right) (Y_1(\mu_n r_s) J_0(\mu_n R) - J_1(\mu_n R) Y_0(\mu_n r_s)) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Die zwei Spezialfälle des zentralen Regelelements (Gl. 22) und des zentralen Detektors (Gl. 23) eignen sich auf Grund ihrer einfachen Struktur besonders gut zur separaten Diskussion des punktkinetischen Terms und des ortsabhängigen Anteils in den Übertragungsfunktionen. Während in Gl. 23 für $n=1$ die Funktionskomponente δu_1 direkt proportional zum punktkinetischen Term ist (Faktor $1 / J_0(\mu_1 R)$), fehlt dieser in Gl. 22 naturgemäß vollständig. Im nachfolgenden Abschnitt 4 erfolgt eine diesbezügliche Diskussion anhand numerischer Resultate im Detail.

Wenn μ_n^2 ab einem bestimmten Index n negativ wird (für $R=150$ und $H=250$ beispielsweise bereits ab $n>1$), sind in den Gl. 14 und 15 die Besselfunktionen $J_n(\mu x)$ durch die modifizierten Besselfunktionen $I_n(-i\mu x)$ und die Neumann-Funktionen $Y_n(\mu x)$ durch die modifizierten Hankelfunktionen erster Art $K_n(-i\mu x)$ zu ersetzen und Gl. 19 ist mit dem Faktor $-\pi/2$ zu multiplizieren (siehe auch Anhang 2).

Zur Einführung von Übertragungsfunktionen werden die auf den stationären Fluß bezogenen Flußdichteschwankungen in ihre vier stochastischen Anteile zerlegt:

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi_0} = h_r^0 \delta\eta_r^0 + h_\phi^0 \delta\eta_\phi^0 + h_r^1 \delta\eta_r^1 + h_\phi^1 \delta\eta_\phi^1 \quad (23)$$

Die in Gl. 23 enthaltenen Übertragungsfunktionen $h_r^0 \dots h_\phi^1$ werden nachfolgend anhand numerischer Berechnungen näher untersucht.

4. Numerische Resultate

Für die numerischen Berechnungen wurden folgende Modellparameter gewählt:

R	150	cm	Extrapolierter Reaktorradius
H	250	cm	Extrapolierte Reaktorhöhe
R_B	7.72	cm	Radius des Führungsschachtes
M^2	60	cm ²	Migrationsfläche
β	0.0064	---	relativer Anteil verzögerter Neutronen
c	-1	---	Quellstärkefaktor
$\bar{\Phi}_0$	1	1/(sec m ²)	Flußdichte-Normierungsfaktor

Der Wert für den Führungsschachtradius R_B ist dem Äquivalenzradius eines hexagonalen WWER-440-Brennelementes gleichgesetzt worden

$$R_B = SW * \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}} \quad (24)$$

mit SW als Schlüsselweite des Hexagons (SW=14.7 cm bei WWER-440).

Die Abbildungen zu den nachfolgend diskutierten numerischen Berechnungen sind im Anhang 3 enthalten.

Für eine erste Abschätzung der zu erwartenden Effekte sind in den Abb. 1 und 2 die Übertragungsfunktionen h_r^1 und h_ϕ^2 für die zwei Spezialfälle des zentralen Regelelements und des zentralen Detektors als Funktion des Abstandes zwischen Quelle und Detektor in der axialen Schicht bei $z=H/4$ dargestellt (siehe auch Gl. 22 und 23). Evidenterweise sind die Übertragungsfunktionen für die Pendelschwingungen (h_r^2) gegenüber den Übertragungsfunktionen für die Translationsschwingungen (h_r^1) in der unmittelbaren Nähe der Quelle jeweils um etwa eine Größenordnung kleiner. Mit zunehmendem Abstand zwischen Regelelement und Detektor verschlechtert sich dieses Verhältnis weiter. Bei Schwingungen eines exzentrischen Regel-

elements ist die räumliche Dämpfung der Übertragungsfunktionen deutlich stärker ausgeprägt als im Fall der zentral positionierten Rauschquelle.

Die Abb. 3 ... 5 beziehen sich ausschließlich auf Schwingungen des zentralen Regelements. In diesem Fall verschwindet der mit einem Reaktivitätseffekt erster Ordnung verbundene punktkinetische Anteil in der Übertragungsfunktion h^1_r . Der Punktterm wird bekanntlich durch die Funktion $1/J_0(\mu_1 * R)$ bestimmt, die im Grenzfall $\beta > 0$ singularär ist. Außerdem sind im Falle des zentralen Regelements die Übertragungsfunktionen $h^{1/2}_r$ und $h^{1/2}_\varphi$ lediglich um $\varphi=90$ Grad gegeneinander phasenverschoben. Gezeigt werden jeweils in Drahtgitterdarstellung die Übertragungsfunktionen h^1_r , h^2_r und deren Verhältnis h^1_r / h^2_r in der Reaktorquerschnittsfläche bei $z=H/4$. Die axiale Position $z=H/4$ wurde hier und weiter unten deshalb gewählt, weil die erste Eigenfunktion für die Reihenentwicklung der Funktionen $h^{2}_{r/\varphi}$ in dieser Ebene ihren Extremalwert hat. Deutlich erkennbar ist die ausgeprägte räumliche Dämpfung der Übertragungsfunktionen. Dabei ist h^2_r stärker gedämpft als h^1_r . Dies wird insbesondere aus Abb. 5 ersichtlich, die das Verhältnis der beiden Übertragungsfunktionen zeigt. In der unmittelbaren Umgebung der Rauschquelle liegt der Betrag der Übertragungsfunktion für die Transversalschwingungen um etwa eine Zehnerpotenz über dem für die Pendelkomponente.

Die Abb. 6 ... 13 zeigen Übertragungsfunktionen für exzentrisch positionierte Regelemente. Translationsschwingungen in radialer Richtung finden in diesem Fall innerhalb eines von Null verschiedenen mittleren Flußdichtegradienten statt. Dabei werden Reaktivitätsschwankungen induziert, die einen globalen Beitrag zum Flußdichterauschen in der Spaltzone liefern. Der für ein zentrales Regelement bezüglich der azimuthalen Koordinate charakteristische, symmetrische Funktionsverlauf ist bei exzentrischen Regelementpositionen gestört (Abb. 6 und 7). Diese räumliche Störung der azimuthalen Symmetrie läßt sich allerdings nicht allein auf den Einfluß des Punktterms zurückführen. Dazu sei die Übertragungsfunktion h^2_r betrachtet. Die Entwicklungsreihe für h^2_r enthält keinen Punktterm. Trotzdem ist eine Abweichung vom azimuthal symmetrischen Funktionsverlauf auch hier deutlich ausgeprägt (Abb. 8 und 9). Dies ist ein Indiz dafür, daß in den Übertragungsfunktionen neben dem punktkinetischen Anteil, der im gesamten Reaktor konstant ist, weitere langreichweitige Komponenten enthalten sind, die zumindest in der gleichen Größenordnung wie der ortsunabhängigen Punktterm liegen. Eine derart charakteristische Ortsabhängigkeit besitzen auch die Übertragungsfunktionen für Schwingungen der Regelementoberteile. Dies konnte anhand von Untersuchungen zum Neutronenflußrauschen bei stochastischen achsparallelen Auslenkungen eines Absorberstabes nachgewiesen werden /Hollstein 85/.

Die Abbildungen 10 und 11 enthalten die Drahtgitterdarstellungen der Übertragungsfunktionen h^1_φ und h^2_φ für Regelementschwingungen in azimuthaler Richtung. Die Position des Regelementes ist die gleiche wie in den Abb. 6 ... 9 ($r_s=45\text{cm}$, $\varphi_s=0$). Die azimuthalen Übertragungsfunktionen lassen sich bezüglich ihrer Größenordnung und räumlichen Dämpfung ähnlich charakterisieren wie die radialen Funktionen h^1_r und h^2_r . Da auch die azimuthalen Schwingungen keine Reaktivitätsstörungen erster Ordnung verursachen, unterstreicht dies ebenfalls den geringen Einfluß des Punktterms auf die Rauschsignalübertragung bei Regelementschwingungen in Druckwasserreaktoren.

Bei zunehmender Exzentrizität der Regelementposition beeinflusst der Spaltzonenrand die

räumliche Struktur der radialen Übertragungsfunktionen (Abb. 12 und 13). Tendenziell verstärkt sich die Dämpfung in Richtung des Spaltzonenentrums bei h_r^1 und h_r^2 . Die azimuthalen Übertragungsfunktionen h_φ^1 und h_φ^2 sind dagegen relativ unempfindlich gegenüber einer variablen Exzentrizität des Regelelementes. Zum Beleg sind in der Abb. 14 die radialen und azimuthalen Funktionen für verschiedene Positionen auf dem Führungskanalrand dargestellt.

In der Abb. 15 wird das Verhältnis der Übertragungsfunktionen h_r^1 zu h_r^2 für zwei Punkte auf dem Führungskanalrand als Funktion der Regelementexzentrizität r_s für $z=H/4$ und $\varphi=0$ gezeigt. Die zwei ausgewählten Detektorpunkte repräsentieren die Positionen für den Maximal- und den Minimalwert der Funktionen in der jeweiligen Spaltzonenebene. Ersichtlich ist, daß der Unterschied zwischen h_r^1 und h_r^2 etwa eine Größenordnung beträgt und relativ unabhängig von der Regelementexzentrizität ist.

Ebenfalls um etwa eine Größenordnung unterscheiden sich die zweite und vierte axiale Entwicklungsfunktion zur Berechnung der Übertragungsfunktionen für die Pendelbewegungen (Abb. 16). Damit werden die bereits im Abschnitt 3 vermuteten guten Konvergenzeigenschaften der Reihenentwicklung in Gl. 9 numerisch bestätigt. Den Hauptanteil zu den Übertragungsfunktionen h_r^2 und h_φ^2 bezüglich der z -Abhängigkeit trägt demnach die Eigenfunktion $\sin(2\pi z/H)$ bei.

5. **Schlußfolgerungen**

Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Modell zur Berechnung der Übertragungsfunktionen für stochastische Schwingungen der Unterteile von Regelementen eines WWER-440-Reaktors basiert auf der Modifizierten-Eingruppen-Diffusions-Gleichung einschließlich Randbedingungen für einen endlichen, homogenen Zylinderreaktor. Als Rauschquellen wurden Schwankungen der Wirkungsquerschnitte im Wasserspalt des Führungskanals betrachtet, die sich als Folge der Regelementeschwingungen ergeben. Das Quellgebiet ist idealisiert mit Hilfe einer Dirac'schen-Delta-Funktion dargestellt worden. Die Beschreibung der räumlichen Unterteilschwingungen wurde auf die Überlagerung der zwei wesentlichen stochastischen Bewegungsanteile reduziert, einer transversalen, achsparallelen Bewegungskomponente und einer linearen Pendelschwingung um den Unterteilschwerpunkt.

Die Übertragung der zwei Schwingungskomponenten ist in der Prompt-Response-Approximation behandelt worden. Damit beschränkt sich der Gültigkeitsbereich der Untersuchungen auf ein Frequenzband von etwa 0.1 ... 10 Hz. Die Rauschquellen selbst wurden auf der Basis der Zweigruppen-Diffusions-Näherung für den Neutronentransport im Modell erfaßt. Die Kopplung des Zweigruppen-Quellmodells an das Eingruppen-Übertragungsmodell erfolgte im Sinne der Modifizierten-Eingruppen-Diffusions-Näherung. Dort wird bekanntlich für stückweise homogene Gebiete in der Spaltzone eine Proportionalität zwischen schneller und thermischer Flußdichte postuliert. Die Voraussetzungen zur Anwendung der Modifizierten-Eingruppen-Diffusions-Näherung sind innerhalb des Führungskanal-Wasserspalt nur bedingt gegeben. Die Berechnungsvorschrift für den Quellstärkefaktors c (siehe Anhang 2) sollte daher nur zur Abschätzung seiner Größenordnung herangezogen werden.

Innerhalb des linearen neutronenphysikalischen Modells sind die Übertragungseigenschaften der Spaltzone eindeutig durch die vier Übertragungsfunktionen $h^1_r \dots h^2_\phi$ bestimmt. Nach Auswertung einer Vielzahl numerischer Berechnungen lassen sich ihre wesentlichen Merkmale wie folgt verallgemeinern:

- Die Beträge der Übertragungsfunktionen für die Pendelschwingungen sind in der unmittelbaren Umgebung des Quellortes um etwa eine Größenordnung kleiner als die Beträge der Übertragungsfunktionen für die Transversalschwingungen. Mit zunehmender radialer Entfernung von der Rauschquelle verschlechtert sich diese Verhältnis weiter.
- Der punktkinetische Anteil innerhalb der Übertragungsfunktionen h^1_r hat bei den geometrischen Verhältnissen eines WWER-440-Reaktors keinen relevanten Einfluß auf die Übertragungseigenschaften der Spaltzone.
- Bezüglich der räumlichen Dämpfung verhalten sich die Übertragungsfunktionen h^1_r und h^2_r sowohl hinsichtlich ihres radialen als auch ihres azimuthalen Funktionsverlaufes qualitativ annähernd gleich. Beide Übertragungsfunktionen haben auf dem Führungskanalrand ihre Maximalwerte. Mit zunehmender radialer Entfernung von der Führungskanalachse wird die Übertragungsfunktion für die Pendelschwingung h^2_r allerdings räumlich stärker gedämpft als die für die Transversalschwingungen h^1_r . Die gleiche Aussage gilt sinngemäß für die Übertragungsfunktionen h^1_ϕ und h^2_ϕ .
- Das Verhältnis der beiden Funktionen h^1_r und h^2_r ist bei einem festen Detektorpunkt im Regelement-Koordinatensystem relativ unempfindlich gegenüber einer Positionsänderung der Rauschquelle im Spaltzonen-Koordinatensystem.
- Bei der Detektion von Schwingungen eines exzentrisch positionierten Regelements reagiert bei gleicher radialer Entfernung von der Rauschquelle der Incoredetektor am empfindlichsten, der die kleinste Entfernung zum Spaltzonenrand hat.
- Den wesentlichen Beitrag bezüglich der axialen Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen für die Pendelschwingungen liefert bereits ihre erste harmonische Eigenfunktion. Demnach wird die Neutronenflußverteilung in der Nähe der axialen Reaktorgrenzen am stärksten durch diese Schwingungsform gestört. Einige Diffusionslängen von der oberen und unteren Grenzfläche entfernt ergibt sich innerhalb des Reaktorkerns eine annähernd lineare Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen von der z-Koordinate entsprechend der Funktion $\sin(2\pi z/H)/\sin(\pi z/H)$ mit $0 \leq z \leq H$.

Die dargestellten Untersuchungsergebnisse sollten in einem nächsten Schritt durch die quantitative Abschätzung der stochastischen Anregungsfunktionen $\delta\eta^{1/2}_{r/\phi}(t)$ ergänzt werden. Dabei sind verschiedene Einflußparameter, wie beispielsweise die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und die Anschlaghäufigkeit zu variieren. Interessant erscheinen insbesondere solche Fälle, bei denen die durch Pendelschwingungen verursachten Auslenkungen gegenüber den achsparallelen Verschiebungen um etwa eine Größenordnung oder mehr dominieren können.

Pendelschwingungen sind zumeist mit Regelementansschlägen verbunden. Eine Dominanz dieser Schwingungsform hat ein erhöhtes Risiko für punktförmige Beschädigungen an den Ummantelungen der Brennelemente zur Folge. Informationen zum Übergang von einer vorherrschenden Bewegungsform in die andere sind somit für die Sicherheitseinschätzung des Reaktors von Bedeutung. Wie die vorliegenden Untersuchungen zeigen, ist das räumliche Feld der Flußdichteschwankungen bei derartigen Übergangsvorgängen signifikant unterschiedlich

strukturiert. Die benötigten Informationen zu Veränderungen in der Schwingungsform eines WWER-440-Regelelementes können somit unter Nutzung der Neutronenflußrauschanalyse bereitgestellt werden.

Die Autoren danken den Herren Prof. Dr. rer. nat. F.-P. Weiß und Dr. rer. nat. habil. P. Schumann (beide Forschungszentrum Rossendorf) für förderndes Interesse, anregende Diskussionen und die kritische Durchsicht des Manuskripts.

Literatur

- /Altstadt 93/ E. Altstadt, and F.-P. Weiß: Experimental and Numerical Investigation of Control Element Vibration During Abnormal Core Barrel Motion at a VVER-440 Type Reactor. Proc. Simulators X, Arlington 1993 (USA), 25.4 48-53
- /Barthel 84/ R. Barthel, and K. Meyer: Applications of Neutron Noise Analysis for Surveillance of PWRs VVER. Proc. Diagnosis of and Response to Abnormal Occurrences at Nuclear Power Plants (1984), IAEA-TECDOC-334 233-254
- /Barthel 85/ R. Barthel: Zur Anwendung der Neutronenflußrauschanalyse für die Überwachung von Regelelementschwingungen. Kerenergie 28(1985)2 61-69
- /Barz 89/ M. Barz: Abbrandabhängigkeit von Neutronenflußschwankungen. Kernenergie 32(1989)8 321-324
- /Bastl 72/ W. Bastl, D. Wach, W.H. Dio und W. Haas: Nachweis von Pendelbewegungen des Kernbehälters im Neutronenflußrauschen. atomwirtschaft 17(1972)5 263-264
- /Collatz 81/ S. Collatz: Zur Berechnung der Neutronenflußstörungen in hexagonalen Reaktorgittern bei Bewegung einer Reaktorkassette. Kernenergie 24(1981)1 2-11
- /Collatz 91/ S. Collatz: Modelluntersuchungen zu Neutronenflußschwankungen in Druckwasserreaktoren durch kollektive Bewegung von Regelorganen. Kernenergie 34(1991)6 249-252
- /Grunwald78/ G. Grunwald, P. Liewers, P. Schumann, and F.-P. Weiß: Experimental Investigations of Flow-Induced Control Element Movements by Noise Analysis. Nuclear Power Plant Control and Instrumentation 1(1978) 291-302
- /Kunze 85/ U. Kunze, and K. Meyer: Transfer of Fuel Assembly Vibrations to Fluctuations of Thermal Neutron Flux. Kernenergie 28(1985)1 9-13
- /Hennig 84/ K. Hennig, and G. Grunwald: Treatment of Flow-Induced Pendulum-Oscillations. Kernenergie 27(1984)7 286-291
- /Hollstein 85/ F. Hollstein: Untersuchungen zur ortsabhängigen Übertragungsfunktion bei zufälligen Regelstabschwingungen in einem Druckwasserreaktor. Kernenergie 28(1985)1 14-18
- /Hollstein 95/ F. Hollstein: Berechnungen von Neutronenflußdichteschwankungen in WWER-Druckwasserreaktoren infolge strömungsinduzierter Schwingungen. Report FZR-110, Rossendorf 1995
- /Lee 83/ Sh. J. Lee, and R. W. Albrecht: The Use of Neutronic Fluctuations to Locate a Vibrating Control Rod in a Pressurized Water Reactor Model. Nuclear Science and Engineering 83(1983) 427-443
- /Liewers 85/ P. Liewers: Rauschdiagnostik. Akademie-Verlag, Berlin 1985 163-171

- /Liewers 87/ P. Liewers, W. Schmitt, P. Schumann, and F.-P. Weiß: Detection of Core Barrel Motion at VVER-440 Type Reactors. Proc. SMORN V (1987) in Progress in Nuclear Energy 21(1988) 89-96
- /Liewers 89/ P. Liewers, W. Schmitt, P. Schumann und F.-P. Weiß: Abbildung anormaler Reaktorschachtschwingungen in externen Neutronenflußschwankungen. Kernenergie 32(1989)8 338-343
- /Lucas 92/ D. Lucas: Modellierung von Schwankungen der Neutronenflußdichte auf Grund von Regelelementschwingungen in Druckwasserreaktoren vom Typ WWER-440. Kerntechnik 57(1992)5 317-321
- /Magnus 48/ W. Magnus und F. Oberhettinger: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Springer-Verlag , Berlin 1948 30-31
- /Meyer 82/ K. Meyer: Zur Abbildung stochastischer Schwingungen von Arbeitskassetten eines Druckwasserreaktors in den Schwankungen der Neutronenflußdichte I. Kernenergie 25(1982)5 204-207
- /Meyer 91/ K. Meyer: Übertragung von Schwingungen von Steuerorganen eines Reaktors WWER-440 im Normalbetrieb. Kernenergie 34(1991)3 77-81
- /Pazsit 80/ I. Pazsit, and G. Th. Analytis: Theoretical investigation of the neutron noise diagnostics of two-dimensional control rod vibrations in a PWR. Annals of Nuclear Energy 7(1980) 171-183
- /Pazsit 84/ I. Pazsit, M. Antonopoulos-Domis, and O. Glöckner: Stochastic Aspects of Two-Dimensional Vibration Diagnostics. Proc. Diagnosis of and Response to Abnormal Occurrences at Nuclear Power Plants (1984), IAEA-TECDOC-334 493-524

Anhang 1: Quellstärkefaktor für die Eingruppennäherung

Zur Berechnung der Änderung der makroskopischen Wirkungsquerschnitte bei der Verschiebung des Regelementunterteils aus seiner zentralen Lage im Führungskanal wird von den geometrischen Verhältnissen entsprechend Fig. A1 ausgegangen. R_B ist der Radius des Brenn-

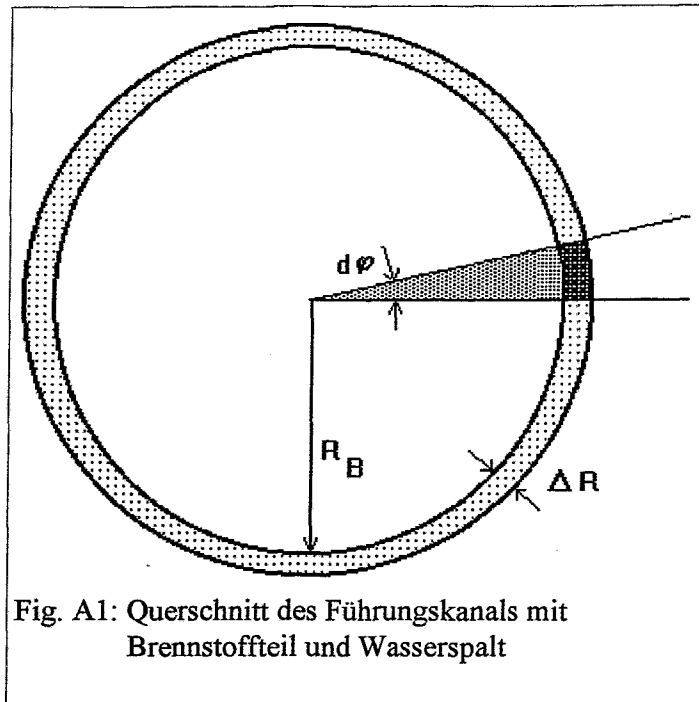


Fig. A1: Querschnitt des Führungskanals mit Brennstoffteil und Wasserspalt

stoffteils und ΔR die mittlere Breite des Wasserspalt bei achsparalleler, zentrierter Ausrichtung des Regelements im Führungskanal. Betrachtet wird ein Gebiet, das durch den Führungskanalradius $R_B + \Delta R$ und das Winkелеlement $d\phi$ begrenzt ist. Der effektive makroskopische Wirkungsquerschnitt für eine Reaktion vom Typ X ist in diesem Gebiet bei Vernachlässigung der Flußaufwölbung im Wasserspalt durch

$$\Sigma_x = \left(1 - 2\frac{\Delta R}{R_B}\right) \Sigma_x^B + 2\frac{\Delta R}{R_B} \Sigma_x^W \quad (a1)$$

gegeben ($\Delta R \ll R_B$). Die oberen Indizes B und W in Gl. a1 beziehen sich auf die Flächenanteile in Fig. A1, die innerhalb des Winkелеlementes $d\phi$ mit (B)rennstoff bzw. mit (W)asser gefüllt sind.

Bei einer Verschiebung des Brennstoffteils um den Betrag δR in Richtung Φ (siehe Fig. A2)

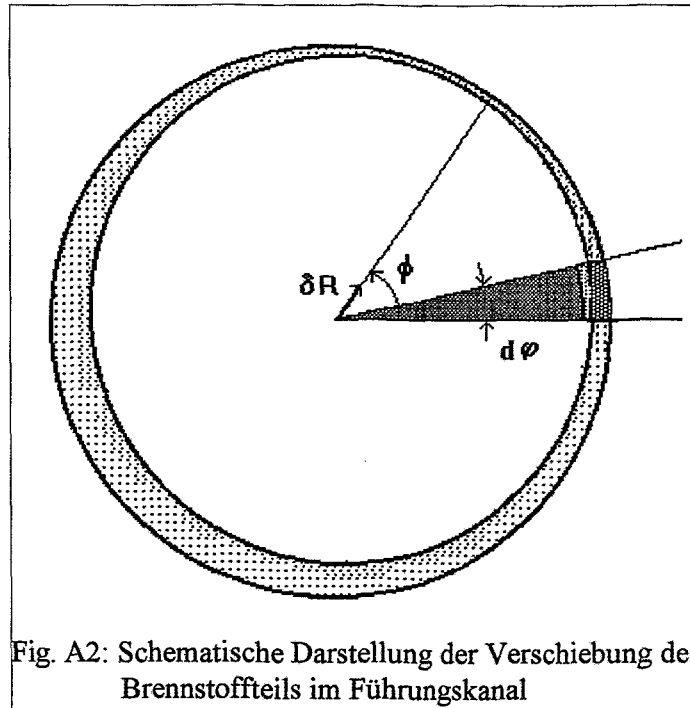


Fig. A2: Schematische Darstellung der Verschiebung des Brennstoffteils im Führungskanal

ändert sich der makroskopische Wirkungsquerschnitt entsprechend

$$\delta\Sigma_x = 2 (\Sigma_x^B - \Sigma_x^W) \frac{\delta R}{R_B} \cos(\Phi - \varphi) \quad (a2)$$

Es sei nun angenommen, daß sich die gesamte Störung des effektiven Wirkungsquerschnitts im Wasserspaltgebiet konzentrieren läßt. Durch den Grenzübergang $\Delta R \rightarrow 0$ bei gleichzeitigem "Festhalten" der integralen Quellstärke können die Schwankungen der Wirkungsquerschnitte als radiale Linienquellen formuliert werden

$$\delta\Sigma_x(r, \varphi) = 2 \delta(r - R_B) (\Sigma_x^R - \Sigma_x^W) \delta R \cos(\Phi - \varphi) \quad (a3)$$

mir $\delta(r - R_B)$ als Dirac'sche Delta-Funktion und (r, φ) als ebene Zylinderkoordinaten.

Zur Berechnung der Quellstärkefaktors c in Gl. 2 wird von den Zweigruppengleichungen für die Flußdichteschwankungen in der Prompt-Response-Approximation ausgegangen. Sie lauten in Operatorschreibweise

$$\underline{D} \delta\Phi + \delta Q = 0 \quad (a4)$$

mit dem Diffusionsoperator

$$\underline{D} = \begin{vmatrix} \Delta + \frac{\Sigma_{p1}}{D_1}(1-\beta) - \frac{1}{\tau} & \frac{\Sigma_{p2}}{D_1}(1-\beta) \\ \frac{\Sigma_{12}}{D_2} & \Delta - \frac{1}{L^2} \end{vmatrix} \quad (a5)$$

und der Quellmatrix

$$\delta Q = \begin{vmatrix} \frac{1}{\tau} (k_{00}(1-\beta) - 1 + \frac{\Sigma_r^W}{\Sigma_r^B}) \\ \frac{1}{L^2} (\frac{\Sigma_a^W}{\Sigma_a^B} - \frac{\Sigma_{12}^W}{\Sigma_a^B}) S_1 \end{vmatrix} 2\delta(r-R_B) \Phi_{01} \delta R \cos(\Phi-\varphi) \quad (a6)$$

Hierbei wurde bereits von der modifizierten Eingruppennäherung (Gl. a7) für den stationären Fluß gebrauch gemacht.

$$\Phi_{02} = S_1 \Phi_{01} \quad (a7)$$

mit

$$S_1 = \frac{\Sigma_{12}^B}{\Sigma_a^B} \quad (a8)$$

In den Gl. a5 ... a7 haben alle verwendeten Bezeichner die übliche Bedeutung. In der Quellmatrix (Gl. a6) sind Schwankungen der Diffusionskonstanten vernachlässigt worden.

Nach der üblichen Aufspaltung der Zweigruppenflüsse in ihre Haupt- und Nebenfluß-Komponenten entsprechend

$$\begin{vmatrix} \delta\Phi_1 \\ \delta\Phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta\Psi_1 \\ \delta\Psi_2 \end{vmatrix} \quad \underline{\delta\Phi} = \underline{S} \underline{\delta\Psi} \quad (\text{a9})$$

mit den Kopplungskoeffizienten S_1 nach Gl. a8 und

$$S_2 = -\frac{\tau}{L^2 (1-k_1(1-\beta))} S_1 \quad (\text{a10})$$

werden die Quellterme in der Haupt-Nebenfluß-Darstellung durch

$$\underline{\delta Q}_{HN} = \underline{S}^{-1} \underline{\delta Q} \quad (\text{a11})$$

überführt. Der Quellterm für die modifizierte Eingruppen-Diffusionsnäherung ist durch das Matrixelement $\delta Q_{HN}(1,1)$ bestimmt:

$$\delta Q_{HN}(1,1) = \frac{1}{M^2} \left((1-\beta)k_{00} - 1 + \frac{\Sigma_r^W}{\Sigma_r^B} + (1-k_1(1-\beta)) \left(\frac{\Sigma_a^W}{\Sigma_a^B} - \frac{\Sigma_{12}^W}{\Sigma_{12}^B} \right) \right) \quad (\text{a12})$$

Für den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Fall des endlichen, homogenen Zylinderreaktors kann bei den bekannten geometrischen Abmaßen eines WWER-440 der Term $(1-\beta)k_{00}-1$ vernachlässigt werden. Nicht vernachlässigbar ist dagegen der schnelle Multiplikationsfaktor k_1 gegenüber 1. Er bestimmt wesentlich den Nulldurchgang der Funktion $c(c_B)$ mit c_B als Borsäurekonzentration [Lucas 92].

Somit lautet die Beziehung für den Quelfaktor c in Gl.3

$$c = \frac{\Sigma_r^W}{\Sigma_r^B} + \left(\frac{\Sigma_a^W}{\Sigma_a^B} - \frac{\Sigma_{12}^W}{\Sigma_{12}^B} \right) (1-k_1(1-\beta)) \quad (\text{a13})$$

Anhang 2: Berechnung der Übertragungsfunktionen

Die radiale Randbedingung

$$\delta\Phi(r=R, \varphi, z, t) = 0 \quad (\text{a14})$$

führt zu

$$a_m^n = -\frac{Y_m(\mu_n R)}{J_m(\mu_n R)} \sum_{k=-1}^1 b_k J_{m-k}(\mu_n r_s) \quad (\text{a15})$$

Dabei sind die Argumente der Neumann-Funktionen Y_m in Gl. 16 mit Hilfe der Relation

$$Y_m(\mu_n \rho) e^{im(\Psi - \varphi_s)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k-m}(\mu_n r_s) Y_k(\mu_n \rho) e^{ik(\varphi - \varphi_s)} \quad (\text{a16})$$

/Magnus 48/ in das Koordinatensystem (r, φ) überführt worden, r_s ist Exzentrizität der vertikalen Achse des Führungskanals.

Zur Bestimmung der verbleibenden Integrationskonstanten b_m^n und A_m^n sind die Besselfunktionen J_m in Gl. 16 und J_0 in Gl. 6 mittels

$$J_m(\mu_n \rho) e^{im(\varphi - \varphi_s)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(\mu_n r_s) J_k(\mu_n \rho) e^{ik(\Psi - \varphi_s)} \quad (\text{a17})$$

in das Koordinatensystem (ρ, Ψ) zu transformieren. Damit läßt sich u_n für $\rho > R_B$ durch

$$u_n = \sum_{k=-1}^1 b_k^n e^{ik(\Psi - \varphi_s)} Y_k(\mu_n \rho) - \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il(\Psi - \varphi_s)} J_l(\mu_n \rho) \sum_{m=-1}^1 b_m^n G_{ml}(\mu_n, r_s, R) \quad (\text{a18})$$

darstellen mit

$$G_{ml}(\mu_n, r_s, R) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Y_p(\mu_n R)}{J_p(\mu_n R)} J_{p-m}(\mu_n r_s) J_{p-l}(\mu_n r_s) \quad (\text{a19})$$

Die Forderung des stetigen Übergangs der Flußdichteverteilung bei $\rho=R_s$ führt zu

$$A_k^n = b_k^n \frac{Y_k(\mu_n R_B)}{J_k(\mu_n R_B)} - \sum_m b_m^n G_{mk} \quad (\text{a20})$$

Die zweite Bedingung zur Bestimmung der Integrationskonstanten A_k^n und b_k^n wird durch eine Integration über das Quellgebiet gewonnen und führt zu

$$A_k^n = b_k^n \frac{\dot{Y}_k(\mu_n R_B)}{\dot{J}_k(\mu_n R_B)} - \sum_m b_m^n G_{mk} + \frac{Q_k^n}{\mu_n \dot{J}_k(\mu_n R_B)} \quad (\text{a21})$$

mit

$$Q_k^n = \frac{c}{M^2} \overline{\Phi}_0 \begin{cases} \frac{1}{2}(\eta_r^n + i\eta_\varphi^n) J_0(\omega_0 \frac{r_s}{R}) J_0(\omega_0 \frac{R_B}{R}) & k=-1 \\ \eta_r^n J_1(\omega_0 \frac{r_s}{R}) J_1(\omega_0 \frac{R_B}{R}) & k=0 \\ \frac{1}{2}(\eta_r^n - i\eta_\varphi^n) J_0(\omega_0 \frac{r_s}{R}) J_0(\omega_0 \frac{R_B}{R}) & k=+1 \end{cases} \quad (\text{a22})$$

Der Strich über den Bessel- bzw. Neumann-Funktionen in Gl. a21 steht für die erste Ableitung der Funktionen.

Aus den Gl. a20 und a21 folgt

$$b_k^n (\dot{Y}_k(\mu_n R_B) J_k(\mu_n R_B) - \dot{J}_k(\mu_n R_B) Y_k(\mu_n R_B)) + \frac{Q_k^n}{\mu_n} J_k(\mu_n R_B) = 0 \quad (\text{a23})$$

und nach Auflösung der Wronski'schen Determinante in Gl. a23 lassen sich die Integrationskonstanten b_k^n durch

$$b_k^n = -\frac{\pi}{2} R_B J_k(\mu_n R_B) Q_k^n \quad (\text{a24})$$

darstellen.

Nach Einführung der folgenden Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 B_0^n &= -\frac{c}{M^2} \overline{\Phi}_0 \frac{\pi}{2} R_B J_1\left(\omega_0 \frac{r_s}{R}\right) J_1\left(\omega_0 \frac{R_B}{R}\right) J_0(\mu_n R_B) \\
 &\approx -\frac{c}{M^2} \overline{\Phi}_0 \frac{\pi}{4} R_B^2 \frac{\omega_0}{R} J_1\left(\omega_0 \frac{r_s}{R}\right)
 \end{aligned} \tag{a25}$$

und

$$\begin{aligned}
 B_1^n &= -\frac{1}{2} \frac{c}{M^2} \overline{\Phi}_0 \frac{\pi}{2} R_B J_0\left(\omega_0 \frac{r_s}{R}\right) J_0\left(\omega_0 \frac{R_B}{R}\right) J_1(\mu_n R_B) \\
 &\approx -\frac{1}{2} \frac{c}{M^2} \overline{\Phi}_0 \frac{\pi}{4} R_B^2 \mu_n J_0\left(\omega_0 \frac{r_s}{R}\right)
 \end{aligned} \tag{a26}$$

können sie in kompakter Form

$$\begin{aligned}
 b_k^n &= \begin{aligned} &-B_1^n (\eta_r^n + i \eta_\varphi^n) && k=-1 \\ &B_0^n \eta_r^n && k=0 \\ &B_1^n (\eta_r^n - i \eta_\varphi^n) && k=+1 \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{a27}$$

geschrieben werden. Damit sind die Entwicklungsfunktionen u_n nach einer Reihe einfacher Umformungen durch

$$u_n = \eta_r^n U_n^r + \eta_\varphi^n U_n^\varphi \tag{a28}$$

mit

$$\begin{aligned}
 U_n^r &= B_0^n \left(Y_0(\mu_n \rho) - \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \frac{Y_k(\mu_n R)}{J_k(\mu_n R)} J_k(\mu_n r) J_k(\mu_n r_s) \cos(k(\varphi - \varphi_s)) \right) + \\
 &2B_1^n \left(Y_1(\mu_n \rho) \cos(\Psi - \varphi_s) - \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k \frac{Y_k(\mu_n R)}{J_k(\mu_n R)} J_k(\mu_n r) \frac{\partial}{\partial \mu_n r_s} J_k(\mu_n r_s) \cos(k(\varphi - \varphi_s)) \right)
 \end{aligned} \tag{a29}$$

und

$$U_n^\varphi = 2B_1^n (Y_1(\mu_n \rho) \sin(\Psi - \varphi_s) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k(\mu_n R)}{J_k(\mu_n R)} J_k(\mu_n r) \frac{2k}{\mu_n r_s} J_k(\mu_n r_s) \sin(k(\varphi - \varphi_s))) \quad (\text{a30})$$

darstellbar. Gl. a30 ist unter der Voraussetzung $|\mu_n R_B \ll 1|$ mit Gl. 19 identisch.

Für den Fall rein imaginärer Funktionsargumente

$$\mu_n x = i\lambda_n x \quad (\text{a31})$$

(λ_n, x reell) sind die komplexen Bessel- und Neumanfunktionen durch die modifizierten Bessel- bzw. Hankelfunktionen erster Art zu ersetzen:

$$\begin{aligned} J_n(\mu_n x) &\rightarrow I_n(\lambda_n x) \\ Y_n(\mu_n x) &\rightarrow K_n(\lambda_n x) \end{aligned} \quad (\text{a32})$$

Da sich durch diese Substitution in Gl. a23 eine andere Wronski'sche Determinante ergibt, sind außerdem die Integrationskonstanten b_m^n mit dem Faktor $-2/\pi$ zu multiplizieren.

Anhang 3: Abbildungen

- Abb. 1: Übertragungsfunktionen h^1_r des zentralen Regelements und des zentralen Detektors als Funktion des Abstandes zwischen Quelle und Detektor
- Abb. 2: Übertragungsfunktionen h^2_r des zentralen Regelements und des zentralen Detektors als Funktion des Abstandes zwischen Quelle und Detektor
- Abb. 3: Übertragungsfunktion h^1_r für $r_s=0, z=H/4$
- Abb. 4: Übertragungsfunktion h^2_r für $r_s=0, z=H/4$
- Abb. 5: Verhältnis der Übertragungsfunktionen h^1_r und h^2_r für $r_s=0, z=H/4$
- Abb. 6: Übertragungsfunktion h^1_r für $r_s=45, z=H/4$
- Abb. 7: Übertragungsfunktion h^1_r für $r_s=45, z=H/4$
- Abb. 8: Übertragungsfunktion h^2_r für $r_s=45, z=H/4$
- Abb. 9: Übertragungsfunktion h^2_r für $r_s=45, z=3/4H$
- Abb. 10: Übertragungsfunktion h^1_φ für $r_s=45, z=H/4$
- Abb. 11: Übertragungsfunktion h^2_φ für $r_s=45, z=H/4$
- Abb. 12: Übertragungsfunktion h^1_r für $r_s=90, z=H/4$
- Abb. 13: Übertragungsfunktion h^2_r für $r_s=90, z=H/4$
- Abb. 14: Verhältnis der Übertragungsfunktionen h^1_r und h^2_r in Abhängigkeit von der Regelementexzentrizität
- Abb. 15: Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen $h^1_r \dots h^2_\varphi$ von der Regelementexzentrizität r_s
- Abb. 16: Verhältnis der Entwicklungsfunktionen u_1 zu u_2 (Gl. 9) in Abhängigkeit von der Regelementexzentrizität r_s

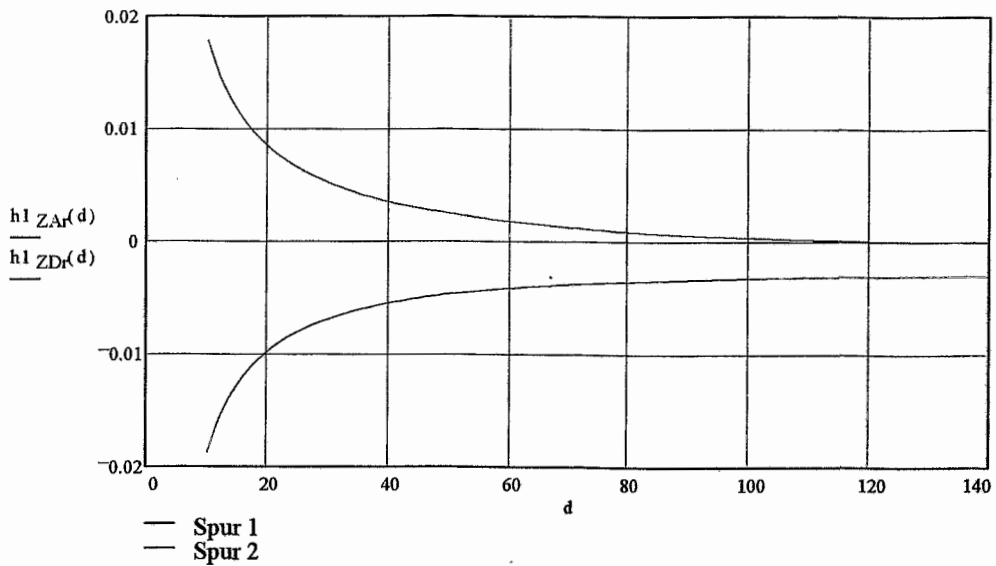


Abb. 1: Übertragungsfunktionen $h1_r$ des zentralen Regelelementes (Spur 1) und des zentralen Detektors (Spur 2) als Funktion des Abstandes d zwischen Quelle und Detektor

Spur 1: $r_s=0$, $r = d = 10 \dots R-10$, $\varphi=0, z=H/4$
 Spur 2: $r=0$, $r_s = d = 10 \dots R-10$, $\varphi=0, z=H/4$

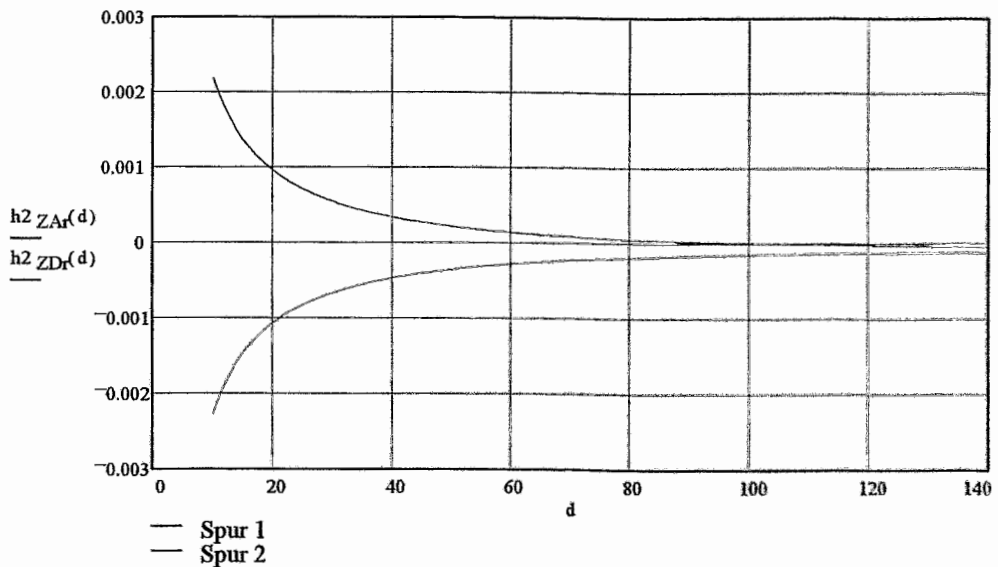
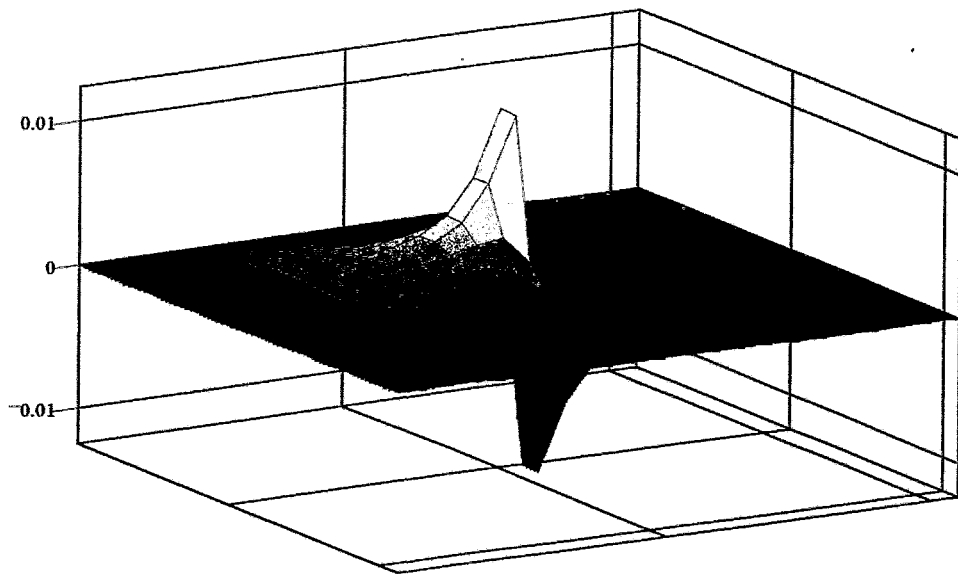


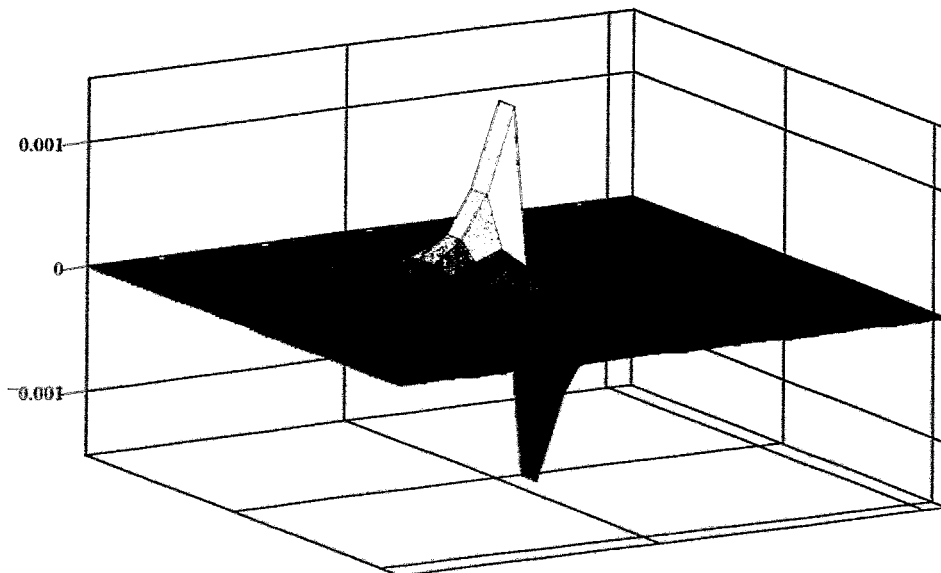
Abb. 2: Übertragungsfunktionen $h2_r$ des zentralen Regelelementes (Spur 1) und des zentralen Detektors (Spur 2) als Funktion des Abstandes d zwischen Quelle und Detektor

Spur 1: $r_s=0$, $r = d = 10 \dots R-10$, $\varphi=0, z=H/4$
 Spur 2: $r=0$, $r_s = d = 10 \dots R-10$, $\varphi=0, z=H/4$



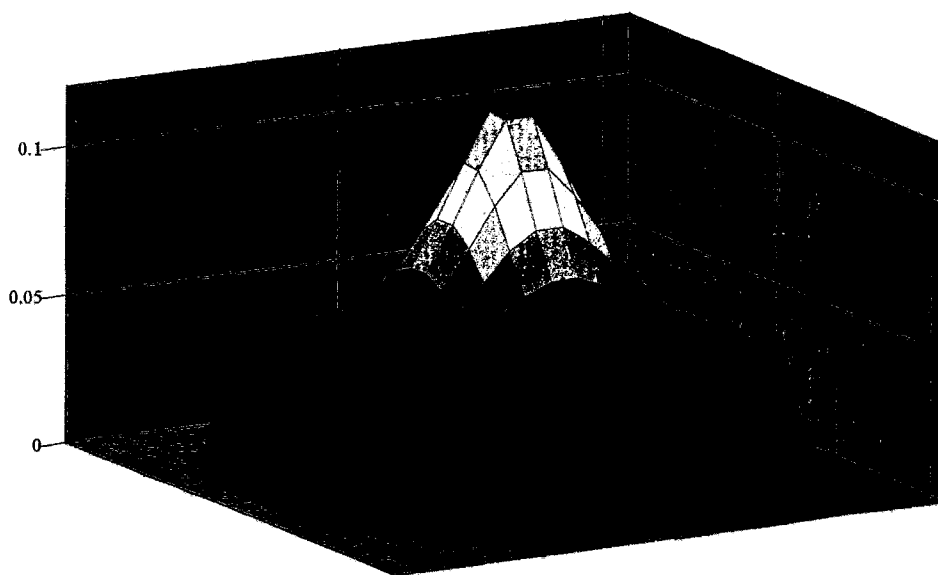
Fig_3

Abb 3: Übertragungsfunktion h^1 , für $r_s=0$ bei $z=H/4$



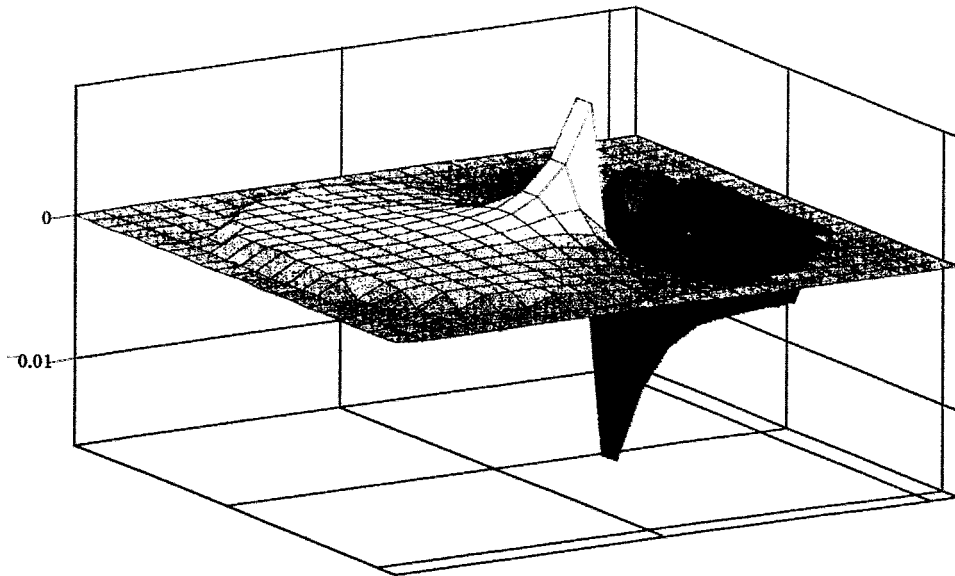
Fig_4

Abb. 4: Übertragungsfunktion h^2 , für $r_s=0$ bei $z=H/4$



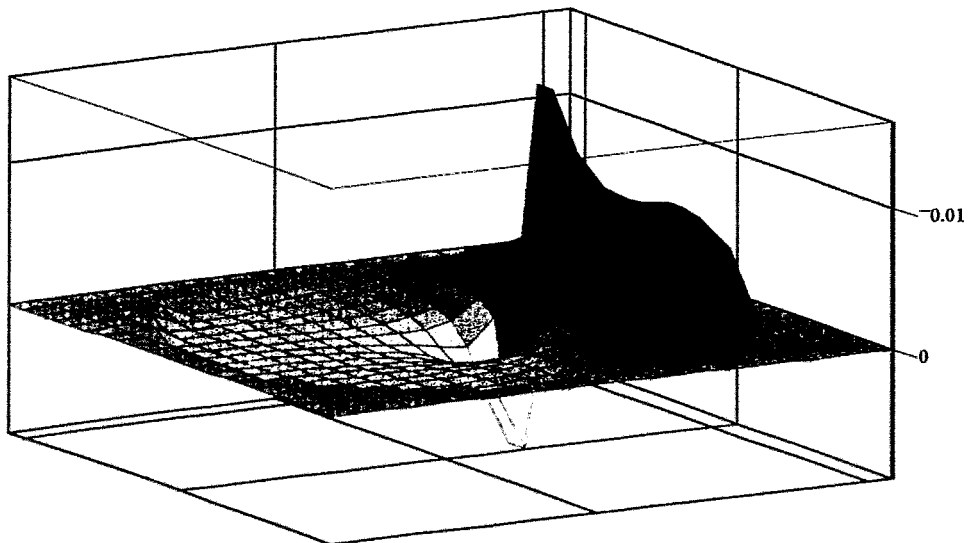
Fig_5

Abb. 5: Verhältnis der Übertragungsfunktionen h_r^2 zu h_r^1 für $r_s=0$ bei $z=H/4$



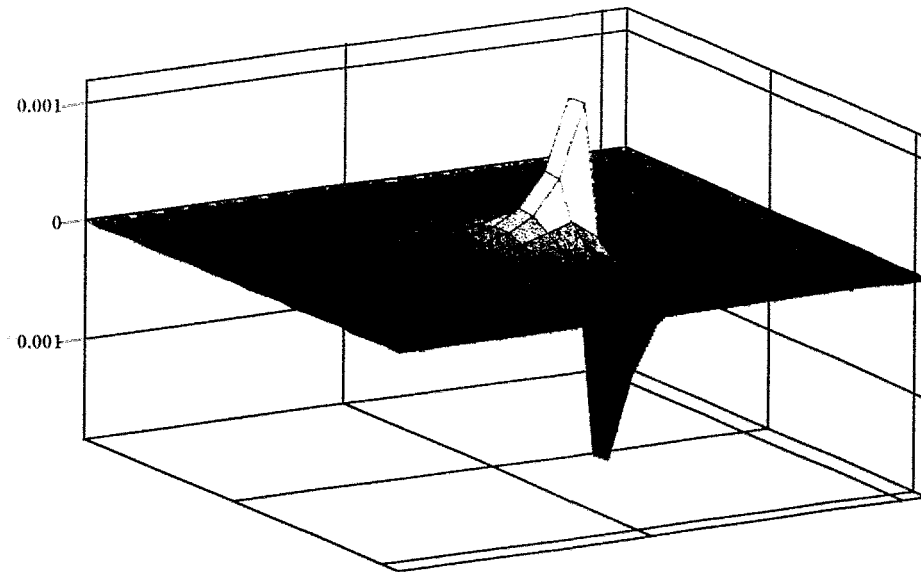
Fig_6

Abb 6: Übertragungsfunktion h^1 , für $r_s=45$ bei $z=H/4$
Neigung der Darstellungsebene 30°



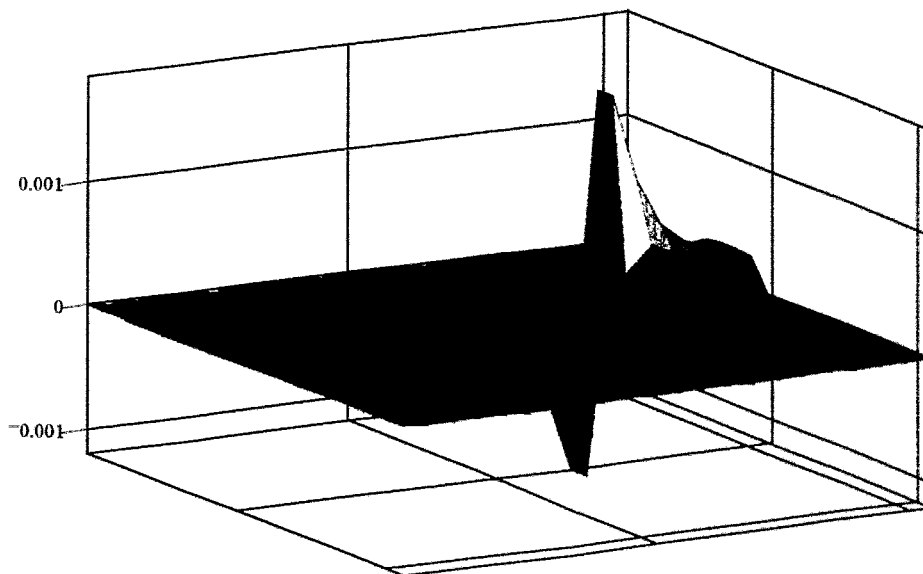
Fig_6

Abb 7: Übertragungsfunktion h^1 , für $r_s=45$ bei $z=H/4$
Neigung der Darstellungsebene 210°



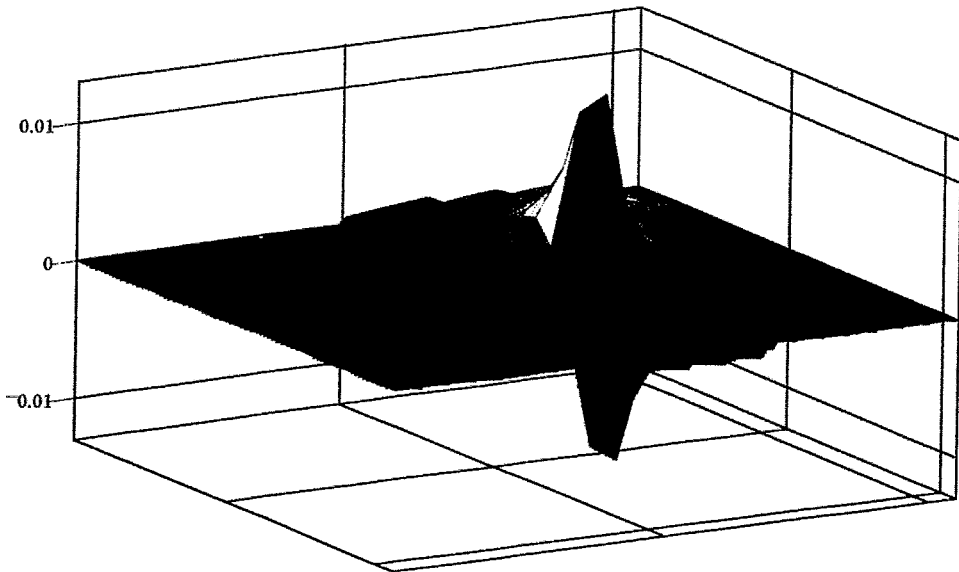
Fig_8

Abb 8: Übertragungsfunktion h^2 , für $r_s=45$ bei $z=H/4$
Neigung der Darstellungsebene 30°



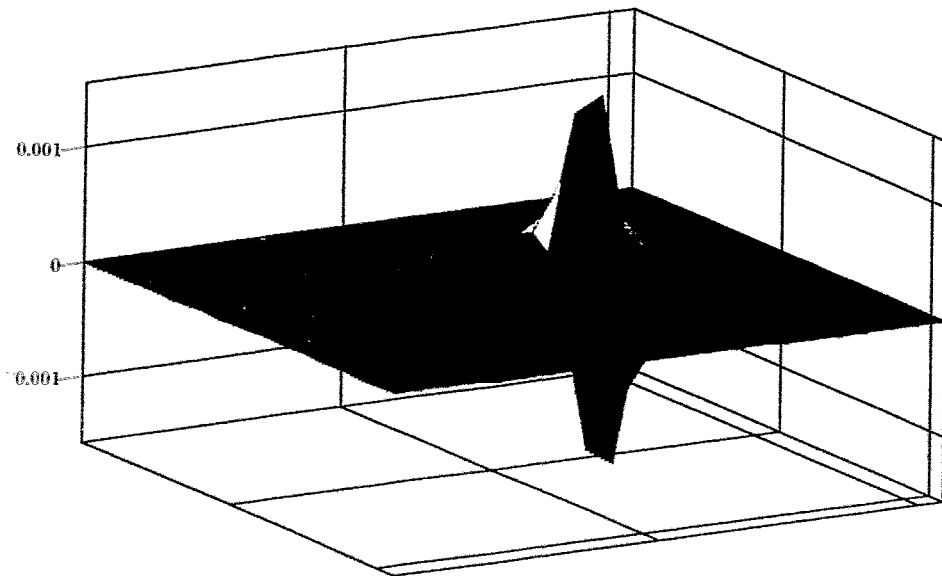
Fig_9

Abb 9: Übertragungsfunktion h^2 , für $r_s=45$ bei $z=H/4$
Neigung der Darstellungsebene 210°



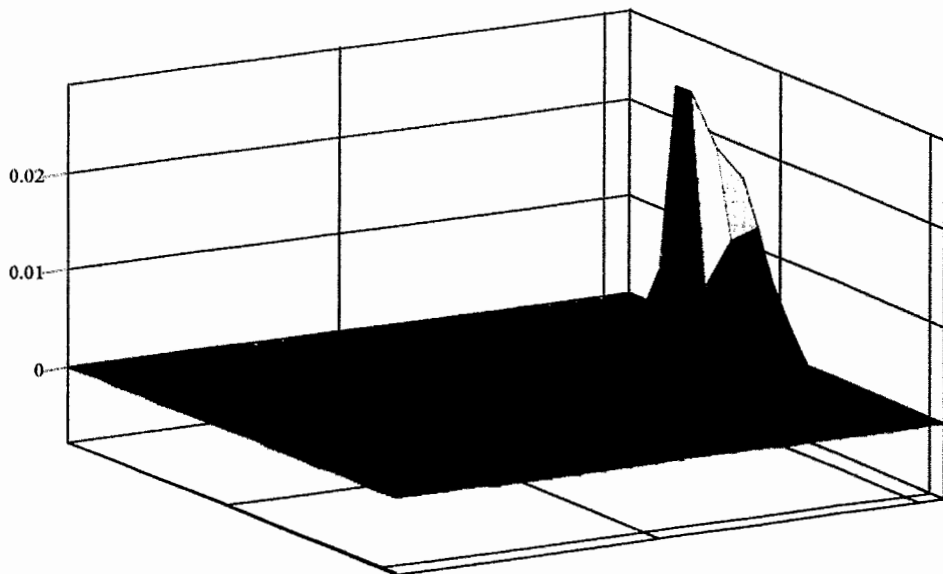
Fig_10

Abb. 10: Übertragungsfunktion h_ϕ^1 für $r_s=45$ bei $z=H/4$



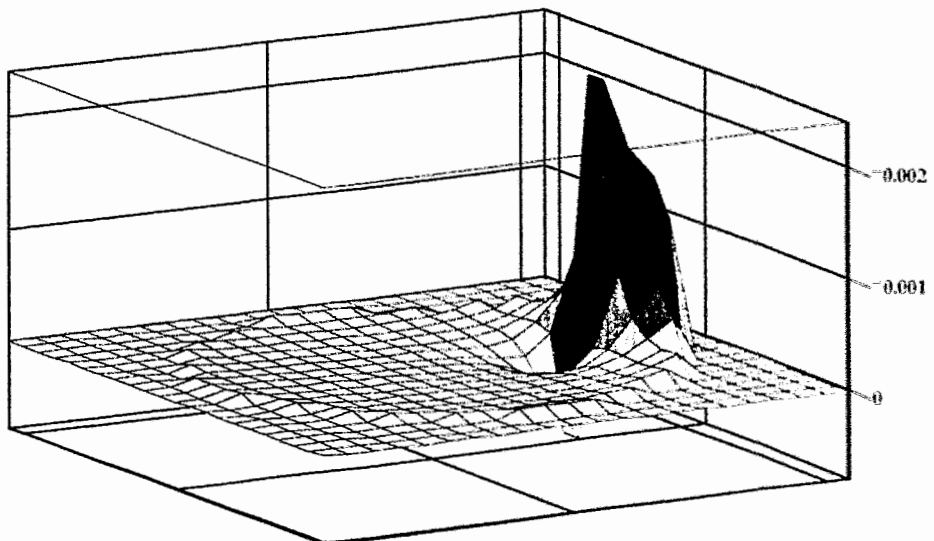
Fig_11

Abb. 11: Übertragungsfunktion h_ϕ^2 für $r_s=45$ bei $z=H/4$



Fig_12

Abb. 12: Übertragungsfunktion h_r^1 für $r_s=90$ bei $z=H/4$
Neigung der Darstellungsebene 210°



Fig_13

Abb. 13: Übertragungsfunktion h_r^2 für $r_s=90$ bei $z=H/4$
Neigung der Darstellungsebene 210°

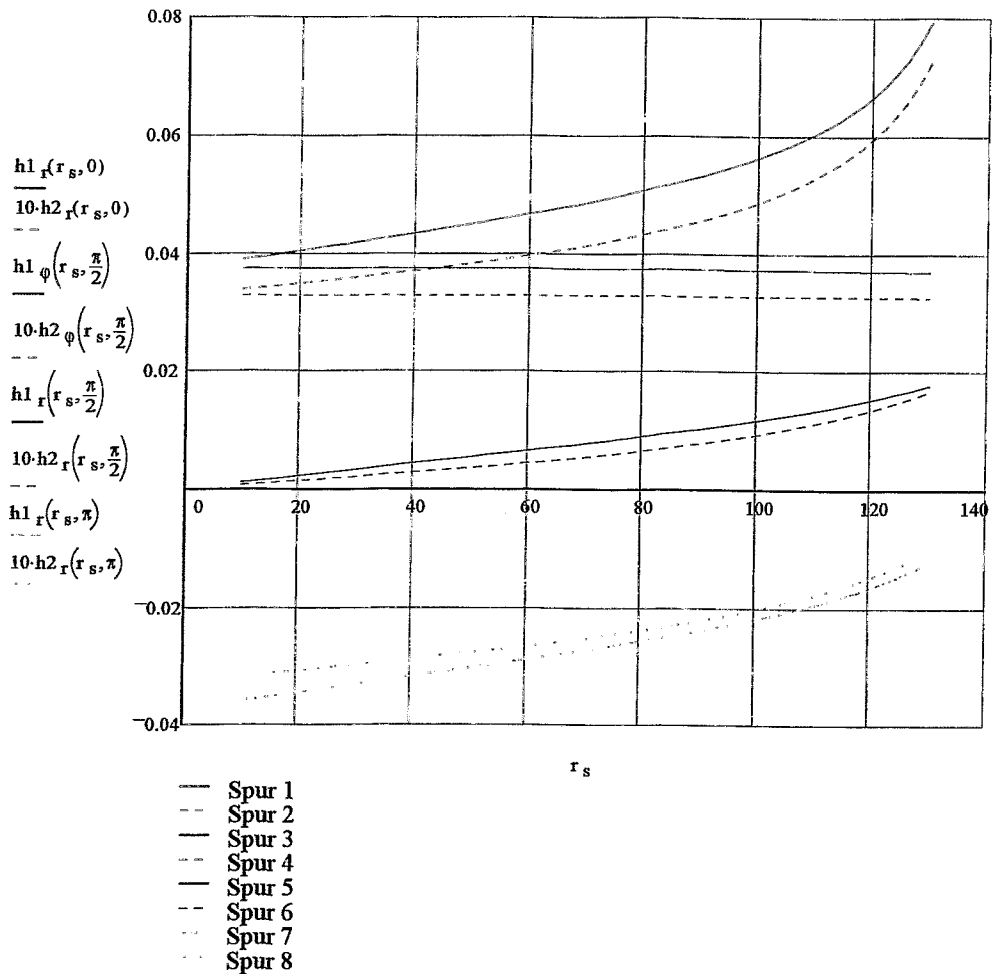


Abb. 14: Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen $h^1_r \dots h^2_\varphi$ auf dem Führungskanalrand von der Regelementexzentrizität r_s

Spuren 1 und 2:	$r = r_s + R_B$	$\varphi = 0$	$z = H/4$
Spuren 3 bis 6:	$\rho = R_B$	$\Psi = -\pi/2$	$z = H/4$
Spuren 7 und 8:	$r = r_s - R_B$	$\varphi = 0$	$z = H/4$

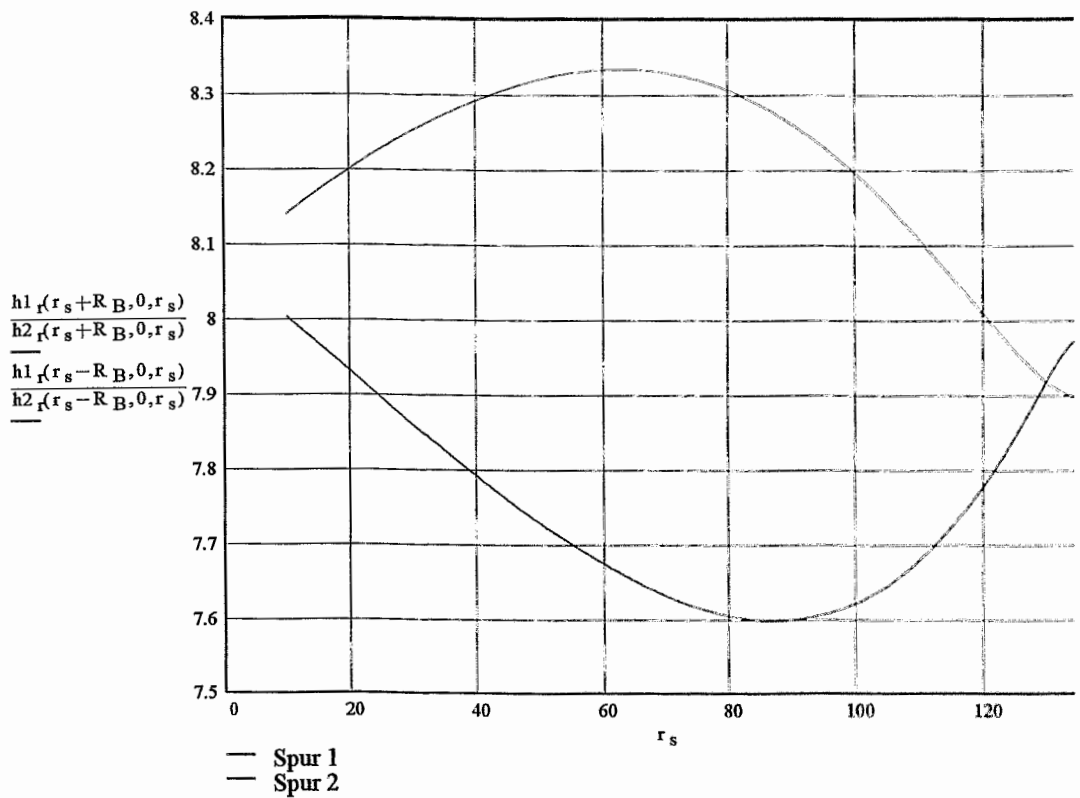


Abb. 15: Verhältnis der Übertragungsfunktionen h_1 , zu h_2 , in Abhängigkeit von der Regelementexzentrizität r_s

Spur 1: $r=r_s+R_B, \varphi=0, z=H/4$

Spur 2: $r=r_s-R_B, \varphi=0, z=H/4$

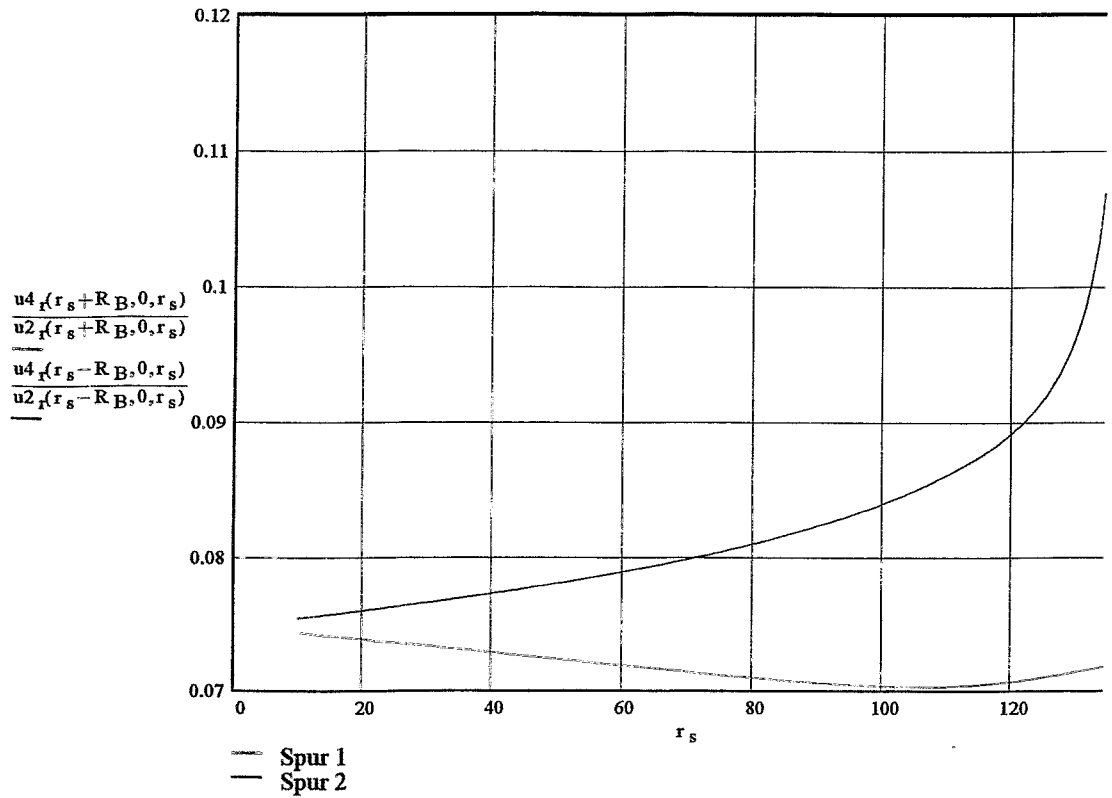


Abb 16: Verhältnis der Entwicklungsfunktionen u_4 zu u_2 (siehe Gl. 9) in Abhängigkeit von der Regelementexzentrizität r_s

Spur 1: $r = r_s + R_B$, $\varphi = 0$

Spur 2: $r = r_s - R_B$, $\varphi = 0$