

FZR-244
Dezember 1998

Archiv-Ex.:

Hoppe, Dietrich

**Modellbildung durch Auswertung
von Fehlerdimensionen**

BED

Herausgeber:
FORSCHUNGSZENTRUM ROSSENDORF
Postfach 51 01 19
D-01314 Dresden
Telefon +49 351 26 00
Telefax +49 351 2 69 04 61
<http://www.fz-rossendorf.de/>

Als Manuskript gedruckt
Alle Rechte beim Herausgeber

FZR-244
Dezember 1998

Hoppe, Dietrich

**Modellbildung durch Auswertung
von Fehlerdimensionen**

Projektbericht

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wird mit Mitteln der DFG unter dem Förderkennzeichen WE 2249/1-1 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt der Arbeit liegt allein beim Autor.

Kurzfassung

Betrachtet werden Prozesse, in denen Teilprozesse voneinander abgrenzbar sind, die unabhängig voneinander zur Komplexität des Prozeßmodellfehlers beitragen. Auf der Grundlage von Dimensionsbetrachtungen wird versucht, die zu den Teilprozessen gehörenden Teilmodelle, d.h. die Elemente der Modellstruktur des Prozesses einzeln zu bestimmen. Ein Gesamtmodell des Prozesses soll auf diese Weise zielgerichteter als mit herkömmlichen Methoden gebildet werden können.

Zur qualitativen Erfassung des Modellfehlers wird anhand von Ansätzen aus der Dimensionsanalyse, einem Bestandteil der Ähnlichkeitstheorie, ein Fehlermodell definiert.

Zur quantitativen Erfassung der Komplexität des Modellfehlers werden dimensionsähnliche Kenngrößen eingeführt, die von einer Variante der fraktalen Dimension, der Zirkel- oder Liniendimension ausgehen.

Inhalt

1. Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Ein einführendes allgemeines Beispiel	3
2. Ermittlung parametrischer Modelle aus Frequenzgangwerten	6
2.1 Verfahrensbeschreibung	6
2.2 Ein Anwendungsbeispiel zur Prozeßanalyse	7
3. Die Dimensionsanalyse als Hilfsmittel zur Modellbildung	10
4. Fehlermodelle	13
4.1 Übertragungsfehler	13
4.2 Signalfehler	15
5. Fraktale Dimensionen für die Modellbildung	16
5.1 Selbstähnlichkeits-Dimensionen	16
5.2 Die Liniendimension	18
5.3 Dimensionsähnliche Kenngrößen für Ortskurven	19
5.3.1 Verlauf der Ortskurve	19
5.3.2 Frequenzskala auf der Ortskurve.....	21
6. Anwendungsbeispiele	22
6.1 Fortführung aus Abschnitt 2.2	22
6.2 Signalanalyse	27
6.3 Punktkinetik von Kernreaktoren	33
7. Zusammenfassung und Ausblick	36
Anhang: Die Dimensionsanalyse als Teil der Ähnlichkeitstheorie	37
Literatur	43

1. Einleitung

1.1 Problemstellung

Eine Modellbildung bezweckt die Übertragung von Eigenschaften eines Objektes auf sein Modell und verlangt dafür einen Informationsfluß vom Objekt zum Modell. Unter einem Objekt wird hier vorzugsweise ein regelungstechnischer Prozeß verstanden. Träger der benötigten Information sind dann die Ausgangssignale des Prozesses. An diese Signale werden folgende Forderungen gestellt:

- a) Die zur Modellbildung notwendige (relevante) Information soll von den Signalen ohne Defizit (ohne die informationstheoretische Irrelevanz, [HQ95]) bereitgestellt werden.
- b) Die Signale sollen möglichst wenig unnötige, die Modellbildung nicht betreffende Information (die informationstheoretische Äquivokation) enthalten.¹

Dabei ist a) eine notwendige Voraussetzung dafür, daß das Modell die verlangten Eigenschaften überhaupt annehmen kann. Die Forderung b) dient der leichten Zugänglichkeit der relevanten Information. Je mehr unnötige Information die Prozeßausgangssignale nämlich enthalten, desto schwieriger ist es, die relevante von der unnötigen Information zu trennen. Der Erleichterung der Informationstrennung dient die folgende vereinfachende Zusatzforderung:

- c) Im Prozeß sollen zwei Teile voneinander abgrenzbar sein, zum einen der zu modellierende Teil als Quelle der notwendigen Information und zum anderen der Teil, von dem die unnötige Information ausgeht. Diese beiden Teile sollen unabhängig voneinander zur Komplexität der Prozeßmodellfehler beitragen.

Die Modellbildung beginnt zweckmäßigerweise mit einem einfachen Modellansatz und baut diesen dann schrittweise aus. Damit die Forderung c) in jedem dieser Ausbauschritte erfüllbar ist, wird die folgende, c) untersetzende Forderung gestellt:

- d) In dem zu modellierenden Teil des Prozesses sind Teilprozesse voneinander abgrenzbar, die unabhängig voneinander zur Komplexität des Prozeßmodellfehlers beitragen, Bild 1.1-1.

Zu jedem Teilprozeß gehört ein Teilmodell. Die zur Bestimmung der Teilmodelle notwendige Parameteridentifikation beinhaltet die Minimierung des Modellfehlers anhand eines Gütekriteriums. Damit die Teilmodelle einzeln bestimmt werden können, wird bezüglich dieses Kriteriums schließlich noch folgendes gefordert:

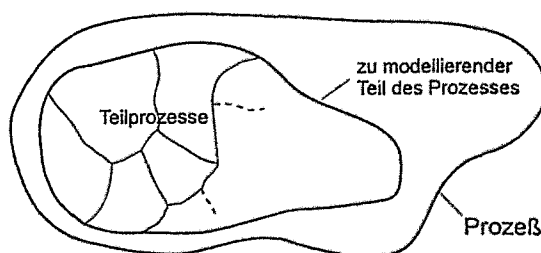


Bild 1.1-1 Zum Inhalt der Forderungen c) und d)

¹ Die Vermeidung unnützer Information ist praktisch kaum möglich, denn Meßgrößen enthalten meistens weitaus mehr als nur die Information über die zu modellierenden Prozeßeigenschaften. Zur Minderung solcher Information können die Signale in geeignete Darstellungsformen gebracht werden; als zweckmäßig erweisen sich Ortskurven. Des weiteren können Störgrößen unterdrückt werden. Im vorliegenden Beitrag werden Störgrößen allerdings noch nicht berücksichtigt.

- e) Die Fehler, welche die Teilmodelle gegenüber ihren zugehörigen Teilprozessen aufweisen, sollen im Gütekriterium unabhängig voneinander erscheinen.

Üblicherweise optimieren Gütekriterien - nur angelehnt an die allgemeine Forderung unter a) - ein auf den gesamten Prozeß bezogenes Modell. Indem solche Kriterien der Forderung e) nicht genügen, ist es mit ihnen i. allg. nicht möglich, die Teilmodelle getrennt zu bestimmen. Folglich ist dann die Richtigkeit einzelner Teilmodell-Ansätze nicht nachweisbar, bevor nicht das Gesamtmodell, d.h. alle Teilmodelle und die sie verbindende Struktur, eingeführt ist. Auch wenn ein Modellansatz schrittweise aus Teilen zusammengefügt wird, so ist der beste (prozeßadäquate) Ansatz erst daran erkennbar, daß er unter allen möglichen Modellansätzen den kleinsten Modellfehler erreicht, [St68].¹ Nachteilig daran ist, daß wegen der Variantenvielfalt der zu prüfenden Modellstrukturen die Suche nach einer günstigen Struktur sehr aufwendig sein kann.

Um neben der Identifikationsaufgabe auch der strukturorientierten Forderung e) zu genügen, geht der vorliegende Beitrag von der Annahme aus, daß die Fehler der Teilmodelle unabhängig voneinander zur Komplexität des Modellfehlers insgesamt beitragen.

Zur quantitativen Erfassung der Komplexität von geometrischen Gebilden eignen sich fraktale Dimensionen [Ed90], [PI92]. Signalfehler werden dahingehend in geometrische und dabei bevorzugt in linienhafte Darstellungsformen (z.B. Ortskurven) gebracht. Mit dem Erreichen der richtigen Parameterwerte des einzelnen Teilmodells wird erwartet, daß

- (1) die Komplexität des Modellgesamtfehlers und somit die Fehlerdimension sprunghaft abnimmt, daraus
- (2) auf die Richtigkeit einzelner Teilmodelle geschlossen werden kann und daraufhin
- (3) die Teilmodelle einzeln aus dem Modellbildungsvorgang ausgeblendet werden können.

Letzteres ist einer einfachen und zielgerichteten Modellsuche dienlich. Im Sonderfall wird die Modellbildung so weit vereinfacht, daß sie sich immer nur auf ein einziges, nämlich das jeweils untersuchte Teilmodell zu beziehen braucht.

Zur Gewinnung von Gütekriterien, die außer der Identifikationsaufgabe auch und vor allem der Forderung e) genügen, sollen die Dimension eines Fehlerraumes oder wenigstens dimensionsähnliche Kenngrößen als Gütemaße formuliert werden. Ein allgemeines Einführungsbeispiel soll dieses Ziel weiter verdeutlichen.

¹ Praktisch äußert sich dieses Problem daran, daß nach jedem Hinzufügen eines Teilmodells damit gerechnet werden muß, daß die Parameter der bereits zuvor eingeführten Teilmodelle immer wieder anders und daher (weil nicht teilmodellbezogen) immer wieder falsch identifiziert werden, solange dem Gesamtprozeß kein adäquates Gesamtmodell gegenübersteht. Diese Problematik wird hier noch ausführlich betrachtet.

1.2 Ein einführendes allgemeines Beispiel

Ein nicht näher bezeichneter Prozeß aus miteinander gekoppelten aber voneinander unabhängigen Teilprozessen soll durch ein Modell aus entsprechenden Teilmodellen beschrieben werden. Die Teilmodellfehler (Fehler jedes Teilmodells gegenüber seinem zugehörigen Teilprozeß) definieren einen Vektorraum, worin

- jeder Teilmodellfehler eine Basisrichtung dieses Raumes festlegt und somit
- die Anzahl fehlerhafter Teilmodelle die Dimension des Fehlerraumes bestimmt

Letzteres besagt, daß die Dimension nicht festgelegt ist, sondern mit wachsender Modellgenauigkeit abnehmen kann.

Der Anschaulichkeit halber wird nur ein 3-dimensionaler Fehlerraum betrachtet. Seine Basisrichtungen sind x_F, y_F, z_F .

Nach der gewohnten Sichtweise, d.h ohne die Berücksichtigung der Forderung e) des Abschnittes 1.1 bezieht sich jeder Modellansatz auf den Prozeß als Ganzes. Dies gilt auch für solche Modellansätze, die eigentlich nur Teilprozesse genau beschreiben können. Ein solcher Ansatz wird hier in weitgehend allgemeiner Form verwendet. Er besitzt nur einen freien Parameter u und erscheint im Fehlerraum als Punkt auf der nicht achsparallelen, wie folgt definierten Geraden:

$$\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1,5 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. parameterfrei} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (1.2-1a,b)$$

Diese Gerade durchstößt die Koordinatenebenen in den Punkten $(0, 6, 2,5)$, $(-3, 0, 1)$ und $(-5, -4, 0)$, Bild 1.2-1.

Das verwendete Gütekriterium verlangt die Minimierung der Quadratsumme über die Fehlerkoordinaten:

$$Q = x_F^2 + y_F^2 + z_F^2 = \text{Min!} \quad , \quad Q: \text{Modellfehler} \quad (1.2-2)$$

Nach (1.2-2) mit der Nebenbedingung (1.2-1b) ergibt sich ein Q-Minimum im Punkt $(x_F^*, y_F^*, z_F^*) = (-53, 20, 26)^{1/21}$.

Als Funktion der Fehlerkoordinaten x_F ist der Modellfehler bestimmt durch $Q = (21x_F^2 + 106x_F + 169)^{1/4}$, Bild 1.2-2. Von Nachteil ist daran einerseits das flache Minimum, genauer der flache Funktionsverlauf am Minimum, denn dies erschwert eine empirische Bestimmung dieses Minimums. Andererseits gehört zum optimalen Punkt wegen $x_F^*, y_F^*, z_F^* \neq 0$ ein Modell, das keinen der drei Teilprozesse exakt beschreibt.

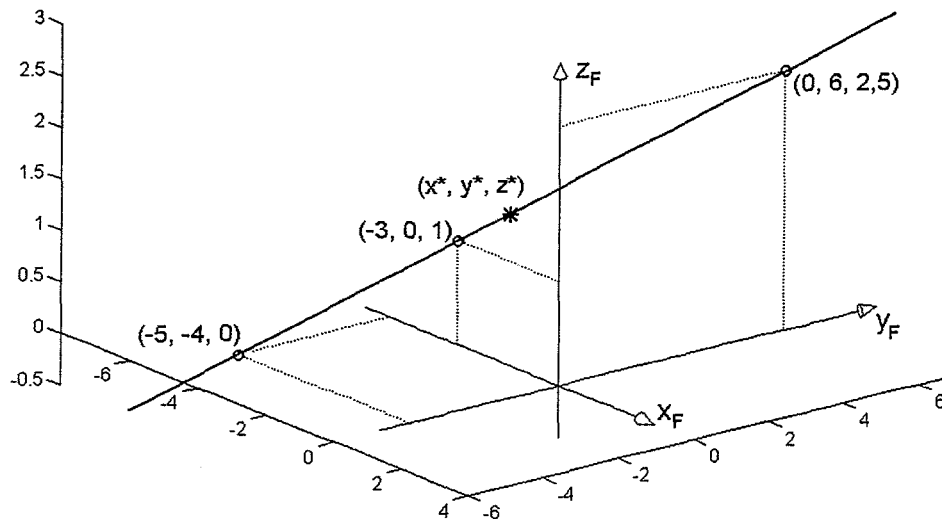


Bild 1.2-1 Eine Fehlergerade in einem 3-dimensionalen Fehlerraum. Nach der Darstellungsform (1.2-1a) erstreckt sich diese Gerade etwa zwischen $u=0$ (links unten) und $u=2,3$ (rechts oben).

Dessen ungeachtet enthält die Fehlergerade aber auch Punkte, wo das Modell je einen der drei Teilprozesse exakt beschreibt. Es sind die schon benannten Durchstoßpunkte durch die Koordinatenebenen. Das Kriterium (1.2-2) kann diese Punkte nicht finden, weil nach (1.2-1a) jede Fehlerkoordinate von u abhängt, also die Forderung e) des Abschnittes 1.1 nicht erfüllt ist.

In den Durchstoßpunkten durch die Koordinatenebenen ist je eine Fehlerkoordinate null und deshalb der Fehlerraum definitionsgemäß nur 2- statt sonst 3-dimensional¹.

Bild 1.2-3 zeigt die Dimension des Fehlerraumes (die Fehlerdimension) als Funktion der Fehlerkoordinaten x_F . Bedeutsam an den Minima dieser Funktion ist deren spitze Form, genauer der spitze Funktionsverlauf zu den Minima hin. An den Stellen dieser Minima beschreibt das eingeführte Teilmodell jeweils einen der drei Teilprozesse exakt. Eine andere Frage (die zentrale Frage dieses Beitrages) ist dabei, wie

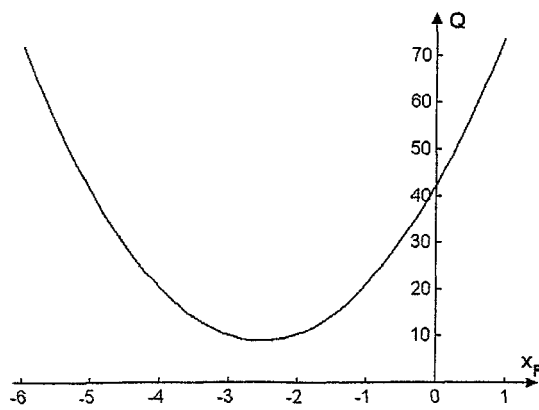


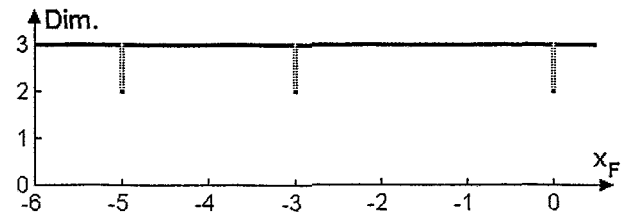
Bild 1.2-2 $Q(x_F)$ entlang der Fehlergeraden (1.2-1b), vgl. Bild 1.2-1

¹ Die Fehlerdimension 1 ist erreichbar, wenn die Nebenbedingung (1.2-1) zu einer Ebene erweitert wird, die den Koordinatenursprung $(0,0,0)$ nicht enthält und deren Normalenvektor nicht parallel ist zum Ortsvektor des bisherigen optimalen Punktes (x_F^*, y_F^*, z_F^*) . Mit einer solchen Ebene als Nebenbedingung folgt aus dem Kriterium (1.2-2) ein Optimum mit kleinerem Q -Wert, wobei aber immer noch $Q > 0$ ist. Die Fehlerdimension ist dann in den drei Punkten gleich 1, wo die Ebene der Nebenbedingung von den Basisvektoren durchstoßen wird, sonst gleich 3. Erst wenn die Nebenbedingung wegfällt, also der prozeßadäquate Modellansatz vollständig eingeführt ist, liegt das Optimum in $(0,0,0)$. Der Modellfehler hat dann den Wert $Q=0$ und die Fehlerdimension ist gleich 0.

die Dimension des Fehlerraumes in einem Gütekriterium formuliert werden muß, damit die Minima der Gütefunktion spitz genug sind, d.h. der in Bild 1.2-3 gezeigten Form möglichst nahekommen.

Im Vergleich zur Form eines Dimensionsminimums hat sein absoluter Wert offenbar nur untergeordnete Bedeutung.

Bild 1.2-3 Die Fehlerdimension entlang der x_F -Koordinate des Modellfehlers. Die Minima für $x_F = -5, -3, 0$ gehören nach (1.2-1a) zu $u = 1/3, 1, 2$.



Zusammenfassend und verallgemeinernd folgendes eingeschätzt:

- Einzelne Teilmodelle können dann als genau bestimmt gelten, wenn geeignet definierte Gütefunktionen ausreichend spitze Minima aufweisen.
- Als Gütemaß eignet sich die Dimension eines Fehlerraumes. Falls diese Dimension praktisch nicht zugänglich ist, müssen geeignete Abwandlungen (dimensionsähnliche Kenngrößen) gefunden werden, die für richtig formulierte Modellansätze genügend spitze Minima sicherstellen.
- Existiert für ein Teilmodell ein genügend spitzes Minimum, so zeigt dies außer der Richtigkeit der Parameter des Teilmodells auch die Richtigkeit des Teilmodell-Ansatzes an. Letzteres ist dann bedeutsam, wenn nicht vorab sichergestellt ist, daß den Teilprozessen auch die richtigen Teilmodell-Ansätze gegenüberstehen. Gibt es kein spitzes Minimum, so folgt daraus zwar nicht notwendig die Falschheit des Ansatzes, doch gibt es ein spitzes Minimum, so darf der Ansatz als richtig gelten.

Die in diesem Abschnitt allgemein dargelegten Probleme werden anhand eines bekannten, regelungstechnisch bedeutsamen Modellbildungsverfahrens konkretisiert (Abschnitt 2). Die traditionell besonders in der Strömungsdynamik benutzte Dimensionsanalyse (Abschnitt 3 und Anhang) ist die Grundlage der Definition von Fehlermodellen (Abschnitt 4). Für die praxistypischen Fälle, in denen nur nichtparametrische Prozeßbeschreibungen vorliegen (z.B. als Meßreihen von Frequenzgängen), wird die Komplexität des Modellfehlers durch Kenngrößen bewertet, die aus einer Variante der fraktalen Dimension, nämlich der Linien- oder Zirkeldimension abgeleitet sind (Abschnitt 5). In drei Anwendungsbeispielen wird anhand der Analyse von Kurven (Ortskurven und Signalgraphen) die Wirkungsweise des entwickelten Verfahrens gezeigt (Abschnitt 6). Noch offene Probleme nennt der Abschnitt 7.

2. Ermittlung parametrischer Modelle aus Frequenzgangwerten

2.1 Verfahrensbeschreibung

Der komplexe Frequenzgang eines regelungstechnischen Prozesses ist experimentell in Real- und Imaginärteil für diskrete Frequenzen bestimmt

$$G_P(j\omega_k) = G_R(\omega_k) + jG_I(\omega_k) \quad \text{mit } \omega_k = k\Delta\omega, \quad k=0,1,2,\dots,K \quad (2.1-1)$$

und soll durch einen parametrischen Modell-Frequenzgang

$$G_M(j\omega_k) = \frac{\sum_{i=0}^m (j\omega_k)^i b_i}{\sum_{i=0}^n (j\omega_k)^i a_i} = K_V \frac{\prod_{i=1}^m (1 + j\omega_k T_i')}{\prod_{i=1}^n (1 + j\omega_k T_i)}, \quad m \leq n \quad (2.1-2)$$

mit K_V : statische Verstärkung
 T_i, T_i' : Zeitkonstanten

beschrieben werden. Eine noch benötigte Vereinfachung von (2.1-2) ist ¹

$$G_M(j\omega_k) \approx \frac{1}{1 + j\omega_k T_S} \quad (2.1-3)$$

mit $T_S = T_1 + T_2 + \dots + T_n - T_1' - T_2' - \dots - T_m'$: Summenzeitkonstante.

Ein bekanntes Lösungsverfahren verwendet die Betragsquadrate

$$\begin{aligned} |G_P(j\omega_k)|^2 &= G_B(\omega_k) \\ &= G_R(\omega_k)^2 + G_I(\omega_k)^2 \end{aligned} \quad (2.1-4)$$

$$|G_M(j\omega_k)|^2 = \frac{B_0 + B_1 \omega_k^2 + \dots + B_m \omega_k^{2m}}{1 + A_1 \omega_k^2 + \dots + A_n \omega_k^{2n}} = \frac{B(\omega_k)}{A(\omega_k)} \quad (2.1-5)$$

und minimiert den verallgemeinerten Fehler [Wu86, S. 366] ²

¹ Eine Übertragungsfunktion $G(s)$ (s : komplexe Variable) in der Linearfaktoren-Darstellung gemäß (2.1-2) mit

$$\begin{aligned} (1+sT_1)(1+sT_2) \dots (1+sT_n) &= 1 + s(T_1+T_2+\dots+T_n) + s^2(T_1T_2+T_1T_3+\dots) + \dots \quad (\text{binomiale Reihe}) \\ \frac{1}{1+sT_i'} &= 1 - sT_i' + s^2T_i'^2 - \dots \quad (\text{geometrische Reihe}) \end{aligned}$$

wird beim Abbruch der beiden Reihen jeweils nach dem linearen Glied approximiert durch

$$G(s) \approx \frac{1}{1+sT_S}, \quad T_S = T_1 + T_2 + \dots + T_n - T_1' - T_2' - \dots - T_m'$$

² Über das mögliche Auftreten von konjugiert komplexer Pole/Nullstellen, Nichtminimalphasigkeit oder Meßstörungen wird hinweggesehen.

$$\varepsilon_v(\omega_k) = G_B(\omega_k)A(\omega_k) - B(\omega_k) \quad (2.1-6)$$

Als Fehlergleichungssystem für $\omega_1, \dots, \omega_K$ lautet der verallgemeinerte Fehler

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_v(\omega_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_v(\omega_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_B(\omega_1) \\ \vdots \\ G_B(\omega_K) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\omega_1^2 G_B(\omega_1) & \dots & -\omega_1^{2n} G_B(\omega_1) & 1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^{2m} \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ -\omega_K^2 G_B(\omega_K) & \dots & -\omega_K^{2n} G_B(\omega_K) & 1 & \omega_K^2 & \dots & \omega_K^{2m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ B_0 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix} \quad (2.1-7a)$$

bzw. kurz

$$\underline{\varepsilon}_v = \underline{u} - V \cdot \underline{b} \quad (2.1-7b)$$

Daraus ergibt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate (MKQ)

$$\underline{\varepsilon}_v^T \underline{\varepsilon}_v = \underset{\underline{b}}{\text{Min!}} \quad (2.1-8)$$

die Bestimmungsgleichung für den Parametervektor

$$\underline{b} = (V^T V)^{-1} V^T \underline{u} \quad (2.1-9)$$

2.2 Ein Anwendungsbeispiel zur Prozeßanalyse

Ein Prozeß ist nichtparametrisch gegeben durch die Frequenzgangwerte von

$$G_P(j\omega_k) = \frac{1}{(1+j\omega_k T_1)(1+j\omega_k T_2)(1+j\omega_k T_3)} \quad (2.2-1)$$

mit $\omega_k = k\Delta\omega$, $k=0, 1, 2, \dots, K$: diskrete Frequenz
 $T_1=100\text{s}$, $T_2=30\text{s}$, $T_3=10\text{s}$: Zeitkonstanten.

Seine Näherung entsprechend (2.1-3) ist

$$G_P(j\omega_k) \approx \frac{1}{1+j\omega_k T_s} \quad (2.2-2)$$

mit $T_s = T_1 + T_2 + T_3 = 140\text{s}$: Summenzeitkonstante.

Ein Prozeßmodell wird durch schrittweises Hinzufügen einzelner Teilmodelle (PT₁-Glieder) entwickelt.

Schritt 1:

Nach (2.1-2) für $K_V=1$, $m=0$ und $n=1$ ist

$$G_M(j\omega_k) = \frac{1}{a_0 + j\omega_k a_1} = \frac{1}{1 + j\omega_k T_a} \quad (2.2-3)$$

mit $\omega_k = k\Delta\omega$, $k=0,1,2,\dots,K=200$, $\Delta\omega=0,0005s^{-1}$.

Aus (2.2-3) folgt nach (2.1-5)

$$|G_M(j\omega_k)|^2 = \frac{B_0}{1+A_1\omega_k^2} = \frac{1}{1+T_a^2\omega_k^2} \quad (2.2-4)$$

Gemäß (2.1-7) mit $G_B(\omega_k)$ nach (2.1-4) folgt

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(\omega_1) \\ \vdots \\ \varepsilon(\omega_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_B(\omega_1)-1 \\ \vdots \\ G_B(\omega_K)-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\omega_1^2 G_B(\omega_1) \\ \vdots \\ -\omega_K^2 G_B(\omega_K) \end{pmatrix} T_a^2 \quad (2.2-5a)$$

bzw. kurz

$$\underline{\varepsilon}_v = \underline{u} - \underline{v} T_a^2 \quad (2.2-5b)$$

Daraus ergibt sich nach (2.1-8)

$$\underline{\varepsilon}_v^T \underline{\varepsilon}_v = \text{Min!} \\ T_a^2$$

gemäß (2.1-9) der optimale Schätzwert der Modellzeitkonstanten

$$T_a^* = \sqrt{(\underline{v}^T \underline{v})^{-1} \underline{v}^T \underline{u}} = 151,9s.$$

Analog zum Optimum im einführenden Beispiel (Abschnitt 1.2) weicht T_a^* erheblich von allen drei Prozeßzeitkonstanten T_1 , T_2 und T_3 ab. Dies liegt zwar auch daran, daß das verwendete Schätzverfahren keine erwartungstreuen Schätzwerte liefert. Der wesentliche Grund der Abweichung ist jedoch, daß das Verfahren ein einzelnes Teilmodell nicht exakt bestimmt, solange nicht alle notwendigen Teilmodelle eingeführt sind bzw. ein prozeßadäquater Modellansatz eingeführt ist.

Die zu T_a^* gehörende Ortskurve von $G_M(j\omega)$ nach (2.2-3) im Vergleich mit der Ortskurve des Prozesses $G_P(j\omega)$ nach (2.2-1) zeigt das Bild 2.2-1.

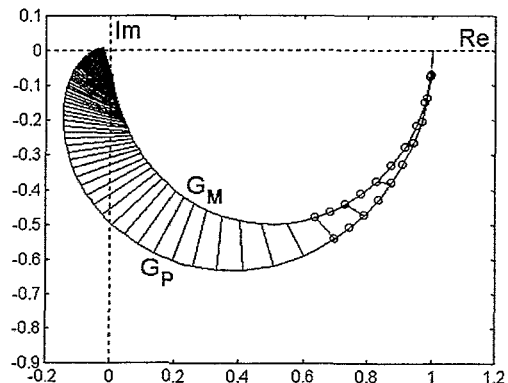


Bild 2.2-1 Die Ortskurven des Modells $G_M(j\omega)$ mit $T_a^*=151,9s$ und des Prozesses $G_P(j\omega)$, beide für $\omega_k=k\cdot 0,0005s^{-1}$, $k=0,1,2,\dots,K=200$, mit Markierungen (Kreise) für $k=1,2,\dots,10$ und mit Hilfslinien zur Markierung gleicher Frequenzen für $k=2,4,6,\dots$

Schritt 2:

Der Modellansatz (2.2-3) wird gemäß (2.1-2) um ein PT₁-Teilmodell erweitert:

$$G_M(j\omega_k) = \frac{1}{a_0 + j\omega_k a_1 - \omega_k^2 a_2} = \frac{1}{1 + j\omega_k(T_a + T_b) - \omega_k^2 T_a T_b} \quad (2.2-6)$$

$$= \frac{1}{(1 + j\omega_k T_a)(1 + j\omega_k T_b)}$$

mit ω_k wie im Schritt 1. Aus (2.2-6) folgt nach (2.1-5)

$$|G_M(j\omega_k)|^2 = \frac{B_0}{1 + A_1 \omega_k^2 + A_2 \omega_k^4} = \frac{1}{1 + (T_a^2 + T_b^2) \omega_k^2 + T_a^2 T_b^2 \omega_k^4} \quad (2.2-7)$$

Gemäß (2.1-7) mit $G_B(\omega_k)$ nach (2.1-4) folgt

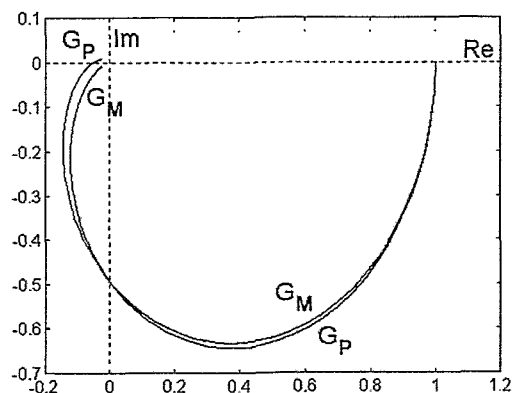
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_V(\omega_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_V(\omega_K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_B(\omega_1) - 1 \\ \vdots \\ G_B(\omega_K) - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\omega_1^2 G_B(\omega_1) & -\omega_1^4 G_B(\omega_1) \\ \vdots & \vdots \\ -\omega_K^2 G_B(\omega_K) & -\omega_K^4 G_B(\omega_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_a^2 + T_b^2 \\ T_a^2 T_b^2 \end{pmatrix} \quad (2.2-8)$$

und daraus ergeben sich nach (2.1-8) und (2.1-9) die optimalen Schätzwerte

$$T_a^* = 73,9 \text{ s}, \quad T_b^* = 52,7 \text{ s} .$$

Auch diese beiden Schätzwerte weichen noch deutlich von jeder der drei Prozeßzeitkonstanten T_1, T_2, T_3 ab. Allerdings zeigen die Ortskurvendarstellungen von $G_M(j\omega_k)$ und von $G_P(j\omega_k)$ im Bild 2.2-2, daß der Modellfehler schon viel kleiner ist als im Schritt 1.

Bild 2.2-2 Ortskurven des Modells $G_M(j\omega)$ mit $T_a^* = 73,9 \text{ s}$, $T_b^* = 52,7 \text{ s}$ und des Prozesses $G_P(j\omega)$



Schritt 3:

Der Modellansatz (2.2-6) wird gemäß (2.1-2) um ein PT₁-Teilmodell erweitert:

$$G_M(j\omega_k) = \frac{1}{a_0 + j\omega_k a_1 - \omega_k^2 a_2 + j\omega_k^3 a_3}$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega_k(T_a + T_b + T_c) - \omega_k^2(T_a T_b + T_b T_c + T_a T_c) + j\omega_k^3 T_a T_b T_c}$$

$$= \frac{1}{(1 + j\omega_k T_a)(1 + j\omega_k T_b)(1 + j\omega_k T_c)} \quad (2.2-9)$$

Dieser Ansatz ist prozeßadäquat (vgl. (2.2-1)) und wird demzufolge mit

$$T_a^*, T_b^*, T_c^* \approx T_1, T_2, T_3$$

nahezu exakt identifiziert¹. Somit bestätigt auch dieses Beispiel, daß die Richtigkeit jedes einzelnen Teilmodell-Ansatzes erst mit der Richtigkeit des Gesamtmodells, also erst am Ende der Modellbildung nachweisbar ist.

3. Die Dimensionsanalyse als Hilfsmittel zur Modellbildung

Vorausgesetzt wird, daß Gemeinsamkeiten zwischen dem Prozeß und seinem Modell in gemeinsamen Parametern $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ zum Ausdruck kommen, wobei der funktionale Zusammenhang dieser Parameter untereinander nicht bekannt sein muß. Die Parameteranzahl n ist nicht festgelegt und kann sich z.B. nach der jeweils geforderten oder erreichten Modellgenauigkeit richten. Bei schrittweiser Modellerweiterung wird n entsprechend zunehmen. Als funktionaler Zusammenhang zwischen den Parametern wird eine allgemeine Parameterfunktion eingeführt:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = c, \quad c: \text{dimensionslose Konstante}$$

und speziell

Prozeß:

Modell:

$$f_P(x_{1,P}, x_{2,P}, \dots, x_{n,P}) = c_P, \quad f_M(x_{1,M}, x_{2,M}, \dots, x_{n,M}) = c_M. \quad (3-1)$$

Die Gemeinsamkeiten zwischen dem Prozeß und seinem Modell sind unabhängig von den Maßstabsfaktoren k_1, k_2, \dots, k_n , mit denen die einzelnen Parameter gemessen werden. Deshalb muß gelten

$$\frac{f_P(x_{1,P}, x_{2,P}, \dots, x_{n,P})}{f_M(x_{1,M}, x_{2,M}, \dots, x_{n,M})} = \frac{f_P(k_1 x_{1,P}, k_2 x_{2,P}, \dots, k_n x_{n,P})}{f_M(k_1 x_{1,M}, k_2 x_{2,M}, \dots, k_n x_{n,M})} = \frac{c_P}{c_M}. \quad (3-2)$$

Erfüllt wird (3-2) dadurch, daß f die Form eines Potenzproduktes

$$f = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} = c \quad (3-3)$$

erhält und somit (3-2) die Gestalt²

¹ Weil keine Störgrößen berücksichtigt sind und nur numerische Effekte wie Störgrößen wirken, bewirkt die verfahrensbedingte Nicht-Erwartungstreue nur einen sehr kleinen Schätzfehler.

² Die Maßstabsfaktoren kürzen sich dann heraus:

$$\frac{(k_1 x_{1,P})^{q_1} (k_2 x_{2,P})^{q_2} \dots (k_n x_{n,P})^{q_n}}{(k_1 x_{1,M})^{q_1} (k_2 x_{2,M})^{q_2} \dots (k_n x_{n,M})^{q_n}} = \frac{k_1^{q_1} k_2^{q_2} \dots k_n^{q_n} x_{1,P}^{q_1} x_{2,P}^{q_2} \dots x_{n,P}^{q_n}}{k_1^{q_1} k_2^{q_2} \dots k_n^{q_n} x_{1,M}^{q_1} x_{2,M}^{q_2} \dots x_{n,M}^{q_n}} = \frac{x_{1,P}^{q_1} x_{2,P}^{q_2} \dots x_{n,P}^{q_n}}{x_{1,M}^{q_1} x_{2,M}^{q_2} \dots x_{n,M}^{q_n}}$$

$$\frac{X_{1,P}^{q_1} X_{2,P}^{q_2} \dots X_{n,P}^{q_n}}{X_{1,M}^{q_1} X_{2,M}^{q_2} \dots X_{n,M}^{q_n}} = \frac{C_P}{C_M} \quad (3-2a)$$

Aus (3-2a) geht hervor:

- Der Quotient links in (3-2a) existiert nur für $x_{1,M}, x_{2,M}, \dots, x_{n,M} \neq 0$, d.h. nur für solche Parameter, die im Modell tatsächlich berücksichtigt werden.
- Parameter, die in Prozeß und Modell wertgleich sind (oder bei fortschreitender Modellverbesserung wertgleich werden), erscheinen in (3-2a) nicht oder kürzen sich heraus¹. Somit existiert der Quotient allein für die Modellparameter, welche mit den zugehörigen Prozeßparametern (noch) nicht übereinstimmen.

Die Exponenten q_1, q_2, \dots, q_n werden von jetzt an - angelehnt an die Dimensionsanalyse [Tr89] (s. Anhang) - auch als metrische Dimensionen verstanden, genauer als Teile der Dimension des Modellfehlers. Die Dimensionsanalyse wird als Teil der sog. Ähnlichkeitstheorie u.a. in der Strömungsdynamik zur Modellbildung genutzt.

Modellverbesserungen äußern sich in (3-2a) durch Annäherungen der Form

$$\left(\frac{X_{i,P}}{X_{i,M}} \right)^{q_i} \rightarrow 1 \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, n.$$

Zwar hat dies seine reale Ursache in der Annäherung $x_{i,M} \rightarrow x_{i,P}$, doch wird formal die Annäherung $q_i \rightarrow 0$ als Ursache angesehen.

Um den Gesamtfehler des Modells als Fehlerdimension darzustellen, werden in (3-2a) die Terme mit gleichem Exponenten als Potenzen geschrieben:

$$\frac{X_{1,P}^{q_1} X_{2,P}^{q_2} \dots X_{n,P}^{q_n}}{X_{1,M}^{q_1} X_{2,M}^{q_2} \dots X_{n,M}^{q_n}} = \left(\frac{X_{1,P}}{X_{1,M}} \right)^{q_1} \left(\frac{X_{2,P}}{X_{2,M}} \right)^{q_2} \dots \left(\frac{X_{n,P}}{X_{n,M}} \right)^{q_n} = \frac{C_P}{C_M} = \left(\frac{C_P}{C_M} \right)^q \quad (3-4)$$

mit q : metrische Dimension des Gesamtfehlers (hier $q=1$).

Die Einzelquotienten (Basen der Potenzen) des Potenzproduktes in (3-4) haben, da sich die physikalischen Dimensionen der Parameter kürzen, keine physikalische Dimension. Demnach sind nur quantitative Unterschiede zwischen den verschiedenen Potenzbasen möglich.

Für die nachfolgende qualitative Betrachtung werden analog zur Einführung von Basisparametern bei der Dimensionsanalyse (s. Anhang) in (3-4a) die Potenzbasen mit einem gemeinsamen aber nicht näher bezeichneten Basiswert B vereinheitlicht. Dazu werden die bisherigen Basen mit solchen Faktoren a_i und a erweitert, daß die Unterschiede zwischen den Potenzen allein durch die neuen Exponenten r_i und r zum Ausdruck kommen:

¹ Für z.B. $x_{n,M} = x_{n,P} = x_n$ ist $\frac{X_{1,P}^{q_1} X_{2,P}^{q_2} \dots X_{n-1,P}^{q_{n-1}} X_n^{q_n}}{X_{1,M}^{q_1} X_{2,M}^{q_2} \dots X_{n-1,M}^{q_{n-1}} X_n^{q_n}} = \frac{X_{1,P}^{q_1} X_{2,P}^{q_2} \dots X_{n-1,P}^{q_{n-1}}}{X_{1,M}^{q_1} X_{2,M}^{q_2} \dots X_{n-1,M}^{q_{n-1}}}$.

$$\left(\frac{x_{i,P}}{x_{i,M}} \right)^{q_i} = \left(a_i \frac{x_{i,P}}{x_{i,M}} \right)^{r_i} = B^{r_i}, \quad \left(\frac{c_P}{c_M} \right)^q = \left(a \frac{c_P}{c_M} \right)^r = B^r$$

mit

$$B = a_1 \frac{x_{1,P}}{x_{1,M}} = a_2 \frac{x_{2,P}}{x_{2,M}} = \dots = a_n \frac{x_{n,P}}{x_{n,M}} = a \frac{c_P}{c_M} \neq 1$$

Damit ist nach (3-4)

$$\left(\frac{x_{1,P}}{x_{1,M}} \right)^{q_1} \left(\frac{x_{2,P}}{x_{2,M}} \right)^{q_2} \dots \left(\frac{x_{n,P}}{x_{n,M}} \right)^{q_n} = B^{r_1+r_2+\dots+r_n} = \left(\frac{c_P}{c_M} \right)^q = B^r. \quad (3-5)$$

Aus (3.5) folgt durch Exponentenvergleich

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = r. \quad (3-6)$$

Sollten zwischen dem Prozeß und seinem Modell alle zueinander gehörenden Parameter übereinstimmen, also für diese Parameter kein Modellfehler bestehen, ist r gleich null zu setzen. Dann hat (3-6) allein die triviale Lösung $r_1=r_2=\dots=r_n=0$ ¹.

Gibt es dagegen noch fehlerhafte Modellparameter, so ist nicht bekannt, ob die betreffenden Summanden positiv oder negativ an r beteiligt sind. Folglich ist ungewiß, ob mit fortschreitender Modellverbesserung, d.h. mit abnehmender Summandenanzahl in (3-6) der Exponent bzw. die Dimension r monoton abnimmt. Um aber eine solche Monotonie zu erzwingen, werden im Unterschied zu (3-6) Beträge summiert:

$$|r_1| + |r_2| + \dots + |r_n| = |r|. \quad (3-7)$$

Im Hinblick auf eine schrittweise Modellerweiterung werden diese Beträge nunmehr einzeln betrachtet und das allgemeine Vorgehen bei der Modellbildung entsprechend spezifiziert:

¹ Für $n > 1$ und $r=0$ hat (3-6) $(n-1)$ -fach unendlich viele Lösungen. Weil aber n veränderlich ist, muß (3-6) für jede mögliche Summanden-Teilmenge erfüllt sein. Das bedeutet, daß bei unterschiedlichem Umfang der Summe in (3-6) dieselben Summanden stets die gleichen Werte annehmen müssen. Demgemäß ist statt (3-6) ein (2^n-1) -zeiliges Gleichungssystem zu lösen:

$$M \underline{r} = \underline{Q} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \quad (3-6a)$$

Wegen $\text{Rang}(M)=n$ hat (3-6a) nur die triviale Lösung $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$.

Das Modell wird schrittweise aufgebaut, indem immer nur ein einziger neuer Parameter (oder im allgemeineren Sinne immer nur ein Teilmodell) eingeführt und dem zugehörigen Prozeßparameter (oder Teilprozeß) angeglichen wird. Dasselbe äußert sich mit Bezug auf (3-4) so, daß immer nur eine Potenz

$$\left(\frac{x_{i,P}}{x_{i,M}} \right)^{q_i} = \left(\frac{c_P}{c_M} \right)_i^q, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-8)$$

eingeführt wird. Dabei soll der Modellfehler allein durch die Beträge der Exponenten zum Ausdruck kommen. Mit der Abnahme des Modellfehlers bzw. mit der Angleichung $|q_i| \rightarrow |q|$, die in der Realität eine Angleichung $x_{i,M} \rightarrow x_{i,P}$ ist, entfällt die i -te Variante von (3-8) von selbst aus der Betrachtung.

Das genannte allgemeine Vorgehen besagt noch nichts über die Gewinnung der Exponenten bzw. Dimensionen. Für diesen Zweck ist die Dimensionsanalyse nicht nutzbar, denn von einem Prozeß, von dem nur eine nichtparametrische Beschreibungsform vorliegt, gibt es folgerichtig auch keine Parameter.

Für die Darstellung der Fehlerdimension wird zur fraktalen Dimension übergegangen. Wie sich allerdings zeigen wird, werden im Rahmen der fraktalen Dimension nur dimensionsähnliche Kenngrößen gefunden, die zudem weitgehend problemorientiert formuliert sein müssen. Für die Gewinnung dieser Kenngrößen ist deshalb ein systematisches Vorgehen kaum möglich.

Bevor diese Problematik aus regelungstechnischer Sicht genauer ausgeführt wird, werden für regelungstechnische Zwecke geeignete Darstellungsformen des Modellfehlers, nämlich Fehlermodelle eingeführt.

4. Fehlermodelle

4.1 Übertragungsfehler

In (3-2) werden die allgemeinen Parameterfunktionen f_P und f_M durch lineare Übertragungsoperatoren in Form der Frequenzgänge $G_P(j\omega)$ für den Prozeß und $G_M(j\omega)$ für das Modell ersetzt, s. (2.1-1) und (2.1-2). Analog zu den Parametern in (3-2) bestehen diese Frequenzgänge aus Teilfrequenzgängen

$$G_P(j\omega) = G_{P1}(j\omega) G_{P2}(j\omega) \dots G_{Pn}(j\omega), \quad G_M(j\omega) = G_{M1}(j\omega) G_{M2}(j\omega) \dots G_{Mn}(j\omega) \cdot$$

Der Quotient nach (3-2) wird definiert als Fehlermodell

$$G_F(j\omega) = \frac{G_P(j\omega)}{G_M(j\omega)} \quad (4.1-1)$$

Die Umformung

$$G_M(j\omega) G_F(j\omega) = G_P(j\omega) \quad (4.1-2)$$

macht $G_F(j\omega)$ zum Korrekturmodell für $G_M(j\omega)$, d.h. der Reihenschaltung von G_M und G_F werden die Übertragungseigenschaften von $G_P(j\omega)$ unterstellt, Bild 4.1-1. Diese Auffassung von einem Fehlermodell ist mit derjenigen in [Lu88] verträglich.

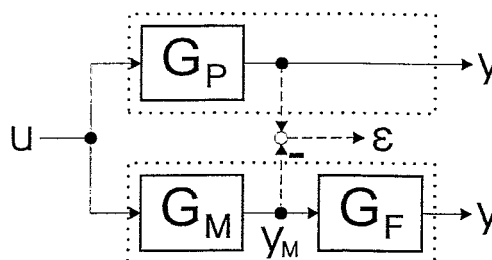
Um das Wesen des Fehlermodell zu verdeutlichen, wird (4.1-1) als Produkt über n Teilprozesse/-modelle geschrieben:

$$G_F(j\omega) = \frac{G_{P1}(j\omega) G_{P2}(j\omega) \dots G_{Pn}(j\omega)}{G_{M1}(j\omega) G_{M2}(j\omega) \dots G_{Mn}(j\omega)} \quad (4.1-3)$$

$$= \left(\frac{G_{P1}(j\omega)}{G_{M1}(j\omega)} \right) \left(\frac{G_{P2}(j\omega)}{G_{M2}(j\omega)} \right) \dots \left(\frac{G_{Pn}(j\omega)}{G_{Mn}(j\omega)} \right)$$

Für richtig identifizierte Teilmodelle entfallen die betreffenden Faktoren in (4.1-3)¹, woraufhin diese Teilprozesse/-modelle nicht weiter berücksichtigt zu werden brauchen. Dies ist vorteilhaft gegenüber herkömmlichen Modellbildungsverfahren, z.B. solchen auf der Grundlage des Ausgangsfehlers $\varepsilon = y - y_M$, siehe Bild 4.1-1 und Beispiel 4.1-1.

Bild 4.1-1 Der Prozeß G_P und die ihm entsprechende Reihenschaltung aus dem Modell G_M und dem Fehlermodell G_F . Weiterhin sind u die Eingangsgröße, y die Ausgangsgröße (für beide Zweige als identisch vorausgesetzt) und ε der Ausgangsfehler.



Beispiel 4.1-1: Der Prozeß und das Modell sind Verzögerungsglieder erster Ordnung (PT₁). Die statische Verstärkung und die Dynamik gelten als eigenständige Teilmodelle:

$$G_P(j\omega) = K_P \cdot \frac{1}{1+j\omega T_P}, \quad G_M(j\omega) = K_M \cdot \frac{1}{1+j\omega T_M}$$

Das Fehlermodell ist hierbei

$$G_F(j\omega) = \frac{G_P(j\omega)}{G_M(j\omega)} = \left(\frac{K_P}{K_M} \right) \cdot \left(\frac{1+j\omega T_M}{1+j\omega T_P} \right)$$

Mit dem Bekanntwerden des Dynamik-Teilmodells ($T_M=T_P$) entfällt der betreffende Faktor und im Fehlermodell verbleibt nur das Statik-Teilmodell:

$$G_F = \frac{K_P}{K_M}$$

Das Fehlermodell hat sich somit quantitativ und qualitativ, d.h. auch die Komplexität des Fehlers betreffend, vereinfacht. Demgegenüber gilt für den Ausgangsfehler

¹ Für z.B. $G_{M1}(j\omega) = G_{P1}(j\omega) = G_n(j\omega)$ ist

$$G_F(j\omega) = \frac{G_{P1}(j\omega) G_{P2}(j\omega) \dots G_{P(n-1)}(j\omega) G_n(j\omega)}{G_{M1}(j\omega) G_{M2}(j\omega) \dots G_{M(n-1)}(j\omega) G_n(j\omega)} = \frac{G_{P1}(j\omega) G_{P2}(j\omega) \dots G_{P(n-1)}(j\omega)}{G_{M1}(j\omega) G_{M2}(j\omega) \dots G_{M(n-1)}(j\omega)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(j\omega)}{u(j\omega)} &= \frac{y(j\omega) - y_M(j\omega)}{u(j\omega)} = K_P \cdot \frac{1}{1 + j\omega T_P} - K_M \cdot \frac{1}{1 + j\omega T_M} \\ &= \frac{K_P - K_M + j\omega(K_P T_M - K_M T_P)}{(1 + j\omega T_P)(1 + j\omega T_M)} \end{aligned}$$

Dieser Fehlerfrequenzgang vereinfacht sich für $T_M = T_P$ nur quantitativ zu

$$\frac{\varepsilon(j\omega)}{u(j\omega)} = \frac{K_P - K_M}{1 + j\omega T_P}$$

Trotz richtiger Bestimmung der Modelldynamik ist demnach im Ausgangsfehler noch die Prozeßdynamik wirksam. Ihr Einfluß verschwindet erst dann, wenn auch die statische Verstärkung richtig bestimmt ($K_M = K_P$) und damit das Modell insgesamt richtig bestimmt ist. Daran äußert sich wie schon in den Beispielen der Abschnitte 1.2 und 2.2, daß nach herkömmlichem bzw. die Teilprozesse nicht berücksichtigendem Vorgehen die Teilmodelle nur alle gemeinsam bestimmt werden können.

4.2 Signalfehler

Ist ein Signal eine Überlagerung von Teilsignalen $S_1 + S_2 + \dots + S_n$, so soll jeder einzelne Teilsignal-Modellfehler im Sinne der obigen Betrachtungen zum Gesamtsignal-Modellfehler S_F beitragen. Um dieses Problem in einer Quotientendarstellung gemäß (3-2a) auszudrücken, wird jedes Teilsignal formal als Exponent einer gemeinsamen, nicht näher bezeichneten Basis b geschrieben. Desgleichen geschieht mit S_F . Gemäß (3-2a) und analog (4.1-1) hat dann das Signal-Fehlermodell die Gestalt

$$b^{S_F} = \frac{b^{S_{P,1}} b^{S_{P,2}} \dots b^{S_{P,n}}}{b^{S_{M,1}} b^{S_{M,2}} \dots b^{S_{M,n}}} = b^{S_{P,1} + S_{P,2} + \dots + S_{P,n} - S_{M,1} - S_{M,2} - \dots - S_{M,n}} \quad (4.2-1)$$

Durch Logarithmierung folgt daraus

$$S_F = S_{P,1} + S_{P,2} + \dots + S_{P,n} - S_{M,1} - S_{M,2} - \dots - S_{M,n} \quad (4.2-2)$$

Für richtig identifizierte Signale verschwinden paarweise die betreffenden Summanden in (4.2-2).

Eine Konsequenz der Darstellung (4.2-2) des Signalfehlers wird im Abschnitt 6.2 durch einen Vergleich mit der Fourier-Analyse verdeutlicht.

5. Fraktale Dimensionen für die Modellbildung

Für Prozesse, über die nur nichtparametrische Beschreibungen (z.B. Meßreihen) vorliegen, werden für die Fehlerdimension q (s. Abschnitt 3) adäquate Kenngrößen gesucht. Dafür wird vom verallgemeinerten Dimensionsbegriff der fraktalen Dimension [Ed90] ausgegangen. Die fraktale Dimension dient z.B. in der Chaostheorie zur quantitativen Charakterisierung von Attraktoren. Eine wesentliche Eigenschaft fraktaler Objekte ist ihre Selbstähnlichkeit. Diese besteht allerdings bei realen Objekten und insbesondere bei nichtparametrischen Prozeßbeschreibungen nur über einen begrenzten Betrachtungsbereich. Aus diesem Grund wird die Komplexität des Modellfehlers im vorliegenden Beitrag grundsätzlich nur lokal (nur für einen geeigneten Betrachtungspunkt) bestimmt. Verwendet werden dafür Formen der Linien- oder Zirkeldimension [PI92], einer Variante der fraktalen Dimension.

5.1 Selbstähnlichkeits-Dimensionen

Der gemessene Grad der Komplexität eines Objektes (einer Fläche, eines Volumens o.ä.) ist erfahrungsgemäß vom verwendeten Betrachtungsmaßstab abhängig. Dies wird üblicherweise dadurch formalisiert, daß die Komplexität r und der Maßstab a durch ein Potenzgesetz nach der allgemeinen Form $r \propto a^q$ (\propto : in der Grenze, hier für $a \rightarrow 0$) verknüpft werden. Der Exponent q , der als metrische Dimension gilt, wird damit zum Maß der Komplexität des Objektes.

Wenn ein Objekt in beliebig kleine Teile geteilt werden kann, von denen jedes eine Kopie des Ganzen ist, dann heißt das Objekt (exakt) selbstähnlich¹. Praktisch wird der Begriff Selbstähnlichkeit aber auch dann gebraucht, wenn ein Objekt diese Eigenschaft nur näherungsweise oder nur in begrenztem Maßstabsbereich aufweist.

Für die Beschreibung der Komplexität selbstähnlicher Objekte wird definiert:

$$a^q = \frac{V}{N} \quad (5.1-1)$$

mit q : metrische Dimension

V : verallgemeinertes Volumen eines n -dimensionales Objektes, dessen metrische Dimension q gesucht ist, ($V \neq N$)

a : (meist 1-dimensionale) Basislänge eines n -dimensionalen Teilobjektes, ($a \neq 1$)

N : Anzahl der zur vollständigen Überdeckung von V notwendigen Teilobjekte²

Aus (5.1-1) folgt die Bestimmungsgleichung

¹ Geraden, Quadrate oder Würfel sind selbstähnlich. Sie sind beliebig unterteilbar und dennoch sind ihre (auch als topologisch bezeichneten) Dimensionen stets 1, 2, 3, also ganzzahlig. Fraktale Objekte sind ebenfalls selbstähnlich, lassen aber nur bestimmte Teilungsfaktoren zu, so z.B. die bekannte Koch'sche Schneeflockenkurve nur die Teilungsfaktoren $1/3$, $1/9$, $1/27$, Die (fraktale) Dimension dieser Kurve ist $1,26\dots$, also gebrochen (lat. fractum = zer-/gebrochen).

² Die Dimension q wird zuweilen auch Boxdimension genannt. Die Bezeichnung Box ist daran angelehnt, daß die verwendeten q -dimensionalen Teilobjekte bei manchen geometrischen Objekten auch (Hyper-)Würfel oder Boxen genannt werden.

$$q = \frac{\log(V) - \log(N)}{\log(a)} \quad (5.1-2)$$

Weil das Volumen V konstant ist, verschwindet sein Anteil bei abnehmender Basislänge a , wohingegen N mit a anwächst. Deshalb ist eine gebräuchlichere Näherung

$$q \approx \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\log(V) - \log(N)}{\log(a)} = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{a}\right)} \quad (5.1-3)$$

Nach (5.1-3) ist

$$N = \frac{1}{a^q} \quad (5.1-4)$$

Ein Beispiel verdeutlicht die Maßstabs-Unabhängigkeit der metrischen Dimension selbstähnlicher Objekte.

Beispiel 5.1-1: Ein Objekt wird

- a) mit $V=1000 \text{ cm}^{q_a}$ gemessen und von $N=8$ q_a -dimensionalen Teilobjekten der Basislänge $a=5 \text{ cm}$ überdeckt und
- b) mit $V=10^6 \text{ mm}^{q_b}$ gemessen und von $N=10^9$ q_b -dimensionalen Teilobjekten der Basislänge $a=0,1 \text{ mm}$ überdeckt.

Gesucht werden q_a und q_b , d.h. die metrischen Dimensionen q in den Fällen a) und b). Nach (5.1-1) gilt:

<p>a)</p> $N \cdot a^{q_a} = V$ $8(5 \text{ cm})^{q_a} = 1000 \text{ cm}^{q_a}$ $8 \cdot 5^{q_a} \text{ cm}^{q_a} = 1000 \text{ cm}^{q_a} \quad (\text{die Maßeinheit entfällt})$ $5^{q_a} = \frac{1000}{8}$	<p>b)</p> $N \cdot a^{q_b} = V$ $10^9(0,1 \text{ mm})^{q_b} = 10^6 \text{ mm}^{q_b}$ $10^9 \cdot 0,1^{q_b} \text{ mm}^{q_b} = 10^6 \text{ mm}^{q_b}$ $0,1^{q_b} = \frac{10^6}{10^9}$
--	--

Somit ergibt sich nach (5.1-2)

$$q_a = \frac{\ln(1000) - \ln(8)}{\ln(5)} = \frac{\log_5(1000) - \log_5(8)}{\log_5(5)} = \log_5\left(\frac{1000}{8}\right) = \log_5(125) = 3$$

$$q_b = \frac{\ln(10^6) - \ln(10^9)}{\ln(0,1)} = \frac{\log_{0,1}(10^6) - \log_{0,1}(10^9)}{\log_{0,1}(0,1)} = \log_{0,1}\left(\frac{10^6}{10^9}\right) = \log_{0,1}(10^{-3}) = 3$$

Das Objekt besitzt also die metrische Dimension $q=3$; es ist ein Würfel mit dem Volumen $V=1000 \text{ cm}^3=10^6 \text{ mm}^3$ (Kantenlänge 10 cm), welcher von a) $N=8$ (Teil-)Würfeln der Kantenlänge $a=5 \text{ cm}$ und b) $N=10^9$ (Teil-)Würfeln der Kantenlänge $a=0,1 \text{ mm}$ vollständig ausgefüllt wird. Die beim Würfel bestehende Maßstabs-Unabhängigkeit der Dimension besteht bei anders geformten geometrischen Objekten i.allg. nicht.

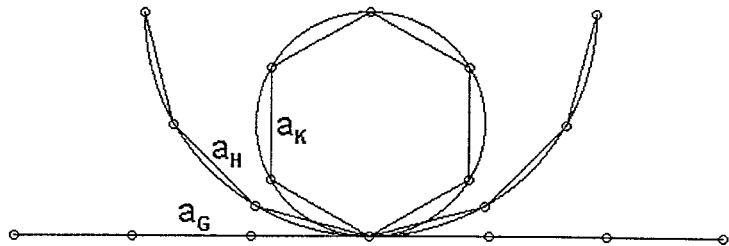
5.2 Die Liniendimension

Nichtparametrische Prozeßbeschreibungen auf regelungstechnischem Gebiet werden gern als Linien oder Kurven dargestellt (Ortskurven, Phasenbahnen, Signalgraphen, ...). Zur Beschreibung der Komplexität solcher Objekte wird im weiteren die Linien- oder Zirkeldimension herangezogen. Die Teilobjekte zur Überdeckung des verallgemeinerten Volumens V (nachfolgend Linienlänge L genannt) sind dabei Geradenstücke (Basisgeraden). Ein Beispiel veranschaulicht das Wesen der Liniendimension.

Beispiel 5.2-1: Betrachtet werden drei Objekte: eine Gerade (G), eine zum Halbkreis (H) und eine zum (Voll-)Kreis (K) gekrümmte Linie, Bild 5.2-1. Sie haben alle dieselbe Länge L . Mit einem Zirkel fester Zirkelweite sind auf jeder Linie Punkte abgetragen. Diese Punkte sind in der gezeigten Form durch Basisgeraden verbunden. Da jedes Objekt in sich eine konstante Linienkrümmung aufweist, gibt es pro Objekt $N=6$ gleichlange Basisgeraden. Weil aber die Objekte untereinander verschieden gekrümmt sind, haben die Basisgeraden objektbezogen unterschiedliche Längen a_G, a_H, a_K :

$$a_G = \frac{L}{N}, \quad a_H = \frac{L}{\pi} \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right) + \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad a_K = \frac{L}{2\pi} \left[\sin^2\left(\frac{2\pi}{N}\right) + \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.2-1)$$

Bild 5.2-1 Verschieden gekrümmte Linien (Gerade, Halbkreis, Kreis) mit jeweils gleicher Länge aber unterschiedlichen Basislängen a_G, a_H, a_K .



Nach (5.2-1) sind die Basislängen a_G, a_H, a_K N - und L -abhängig. Die nach (5.1-3) mit (5.2-1) bestimmte N -Abhängigkeit der Liniendimensionen q_G, q_H, q_K zeigt das Bild 5.2-2.

Die Dimension der Geraden ist konstant mit $q_G=1$ (Zeichen ihrer Selbstähnlichkeit).

Halbkreis und Kreis sind nicht selbstähnlich, denn ihre Dimensionen nähern sich mit zunehmendem N asymptotisch (von null her) dem Wert eins¹. Dennoch ist für jedes feste N die folgende Regelmäßigkeit erkennbar:

Die Abweichung der Liniendimension q vom Wert eins bzw. der Betrag $|q-1|$ ist um so größer, je mehr die Objekte gekrümmt sind². Somit eignet sich $|q-1|$ zumindest als relatives Maß für die Komplexität (die Krümmung) von Linien oder Kurven.

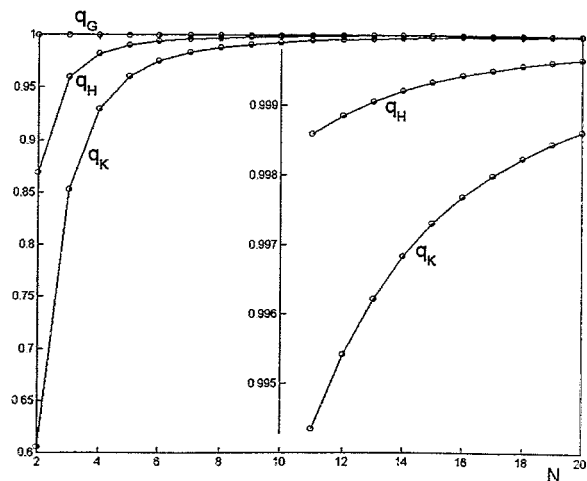


Bild 5.2-2 Die Liniendimensionen q_G, q_H, q_K als Funktionen von N nach der Näherung (5.1-3)

¹ Diese Objekte ähneln bei grobem Maßstab einem Punkt (Dimension null), während bei hoher Auflösung ihre (lokale) Ähnlichkeit zur Geraden (Dimension eins) überwiegt.

² Nach der exakten Formel (5.1-2) haben für $N < L$ und $N > L$ die krummen Linien Dimensionen $q > 1$ und $q < 1$. Trotzdem wächst auch dann der Betrag $|q-1|$ mit der Linienkrümmung.

Nachteilig an der Liniendimension ist, daß sie für ihre Bestimmung die wahre Liniendlänge L voraussetzt. Diese Länge ist aber bei realen Linien, die i. allg. unregelmäßig gekrümmt und oftmals nur lückenhaft oder nur punktuell bekannt sind, meist nicht bekannt. So können z.B. Ortskurven experimentell nicht vollständig, sondern nur für endlich viele und nicht zusammenhängende ω -Werte angegeben werden. Außerdem sollte L möglichst nicht durch $\sum a$ ersetzt werden¹. Aus diesen Gründen wird im folgenden nach Abwandlungen der Liniendimension gesucht, welche ohne die wahre Liniendlänge auskommen.

5.3 Dimensionsähnliche Kenngrößen für Ortskurven

Für die Betrachtung von Frequenzgangkennlinien (Ortskurven) muß beachtet werden, daß zur vollständigen Darstellung eines Frequenzganges als Ortskurve neben

- dem Verlauf der Kurve in der komplexen Ebene auch
- die ω -Skala auf der Kurve

gehört [Bu72]. Beides wird fortan getrennt berücksichtigt.

5.3.1 Verlauf der Ortskurve

Bei den Kreislinien im Bild 5.2-1 teilen die Begrenzungspunkte jeder Basisgeraden ein Segment der Kreislinie ab. Je kleiner der Radius bzw. je stärker die Linienkrümmung ist, desto größer sind

- die Differenz zwischen der Länge l eines Liniensegmentes (Segmentlänge, siehe im Bild 5.3-1) und der zugehörigen Basislänge a , wobei diese Differenz besser mit l normiert durch $\frac{l-a}{l}$ ausgedrückt wird, und
- der als Maß der Linienkomplexität geeignete Betrag $|q-1|$ (s. Abschnitt 5.2).

Diese tendenzielle Ähnlichkeit wird als Proportionalität ausgedrückt. Dies geschieht aber, weil sich die Dimension q nicht nur auf Liniensegmente, sondern auf die gesamte Linie (Ortskurve) bezieht, anhand der Gesamtlängen $\sum l=L$ und $\sum a$ ²:

$$\frac{L - \sum a}{l} \sim |q-1| \quad (5.3-1)$$

Weil bei Ortskurven die Gesamtlänge L und somit auch die Segmentlängen l zwi-

¹ Bei kreisförmiger Linienkrümmung wie im Beispiel 5.2-1 sind die Basislängen konstant und daher ist $\sum a=N \cdot a$. Wird L durch $N \cdot a$ ersetzt, so ergibt sich nach (5.1-2) unabhängig vom Krümmungsradius die Dimension $q = \frac{\log(N \cdot a) - \log(N)}{\log(a)} = 1$.

² Nur für gleichlange Basisgeraden ist $\sum a=N \cdot a$. Die ω -Stützstellen von Ortskurven sind aber i. allg. nicht äquidistant. Für solche Fälle wird a fortlaufend indiziert: a_k mit $k=0,1,2,\dots,K$.

schen zwei aufeinanderfolgenden ω -Stützstellen nicht bekannt sind, wird für $\frac{l-a}{l}$ eine Ersatzgröße benötigt, die unter praktischen Bedingungen auch bestimmbar ist.

Wie sich am Kreis zeigen läßt, eignet sich dafür der Betrag des Segmentwinkels α , den ein Liniensegment und die zu ihm gehörende Basisgerade am Berührungspunkt miteinander einschließen, Bild 5.3-1 links ¹.

Im Hinblick auf unregelmäßig gekrümmte Linien wird statt des einzelnen Segmentwinkels α derjenige Winkel bestimmt, der sich zwischen jeweils einer Basisgeraden und der Richtung der angrenzenden Basisgeraden befindet

(Basiswinkel); beim Kreis ist dies der Winkel 2α , Bild 5.3-1 rechts.

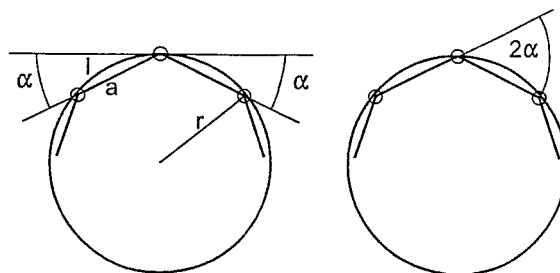


Bild 5.3-1 Segmentwinkel α zwischen Kreissegmenten der Länge l und Basisgeraden der Länge a an einem Kreis mit dem Radius r

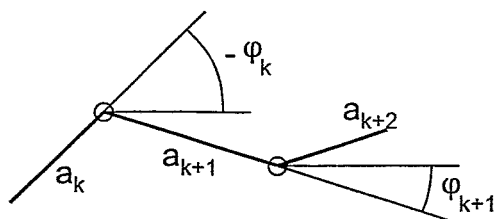


Bild 5.3-2 Absolute Winkel der Basisgeraden

Im weiteren werden die absoluten Winkel der Basisgeraden mit φ_k bezeichnet (Bild 5.3-2). Deren Differenzen (die Entsprechungen zum Winkel 2α im Bild 5.3-1) sind die Basiswinkel $\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$. Die Betragssumme ϕ der Basiswinkel einer Kurve wird gemäß (5.3-1) als eine Abwandlung der Liniendimension bzw. als dimensionsähnliche Kenngröße aufgefaßt.

Somit ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\phi = \sum_{k=1}^{K-1} |\varphi_{k+1} - \varphi_k| \quad : \text{Gesamtheit der Basiswinkel} \quad (5.3-2)$$

mit $\varphi_k = \arg[G_F(j\omega_{k+1}) - G_F(j\omega_k)]$.

Um Winkeländerungen mehr hervorzuheben, wird zusätzlich diskret differenziert:

$$\phi_\Delta = \sum_{k=1}^{K-2} |\Delta\varphi_{k+1} - \Delta\varphi_k| \quad : \text{Gesamtheit der Basiswinkeländerungen} \quad (5.3-3)$$

mit $\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$.

¹ Bei einem Kreis mit dem Radius r gilt für den Segmentwinkel α , den eine Basisgerade und das ihr zugehörige Liniensegment gemäß Bild 5.3-1 miteinander einschließen, $\alpha = \frac{l}{2r}$ (in Bogenmaß).

Aus Winkelbetrachtungen folgt $\sin\left(\frac{l}{2r}\right) = \frac{a}{2r}$. Daraus ergibt sich mit $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$,

wobei die Potenzreihe nach dem linearen Glied abgebrochen wird, $l-a = \frac{l^3}{24r^2} = \frac{1}{6} \left(\frac{l}{2r}\right)^2 l = \frac{1}{6} \alpha^2 l$

und somit $\frac{l-a}{l} \sim \alpha^2$. Weil die Segmentwinkel an realen Ortskurven üblicherweise sehr klein sind,

wird das Winkelquadrat durch den Winkelbetrag ersetzt: $\frac{l-a}{l} \sim |\alpha|$.

Anmerkung: Daß ein Ortskurvenverlauf Hinweise auf einen Modell-Strukturansatz, insbesondere in Form einer gebrochenrationalen Übertragungsfunktion geben kann, ist allgemein bekannt. So ist die Anzahl der Quadranten in der komplexen Ebene, die eine Ortskurve für $\omega \in [0, \infty]$ durchläuft, bestimmt durch

$$z = n + m_- - m_+, \quad z: \text{Quadrantenanzahl}, \quad (5.3-4)$$

n : Anzahl der Pole und

m_+/m_- : Anzahl der Nullstellen in der linken/rechten Seite der komplexen s-Halbebene (s : komplexe Frequenz).

Allerdings erlaubt z beim Vorhandensein von Nullstellen keine eindeutigen Schlüsse auf die Anzahlen von Polen und Nullstellen der Übertragungsfunktion.

Die dimensionsbezogene Bewertung der Komplexität von Fehlerortskurven nutzt zwar deutlich mehr Information über diese Kurven, doch treten auch hier beim Vorhandensein von Nullstellen besondere Probleme auf. Diese Probleme werden im vorliegenden Beitrag nicht näher erörtert; Nullstellen werden deshalb nicht berücksichtigt.

5.3.2 Frequenzskala auf der Ortskurve

Ohne für die Frequenzskala eine eigenständige Betrachtung vorzunehmen, werden die winkel- bzw. richtungsbezogenen Kenngrößen ϕ nach (5.3-2) und $\Delta\phi$ nach (5.3-3) einfach für die Abstände zwischen den ω -Stützstellen einer Ortskurve modifiziert. Die Begründung dafür ist die Existenz von Möglichkeiten zur Umwandlung von Längen in Winkel. Eine geometrische Möglichkeit, nach der sich variierende Punktabstände in Linienkrümmungen umwandeln lassen, skizziert das Bild 5.3-3.

Die Existenz solcher Möglichkeiten soll als Grund genügen, um in (5.3-2) und (5.3-3) die Basiswinkel durch die Basislängen zu ersetzen:

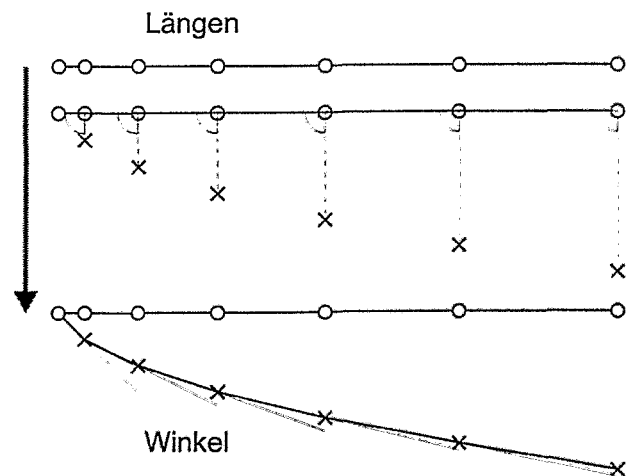


Bild 5.3-3 Eine Möglichkeit der Umwandlung von Punktabständen (Längen) in eine Linienkrümmung (Winkel). Oben: variierende Punktabstände. Mitte: Die Längen werden nach unten gedreht. Unten: Basiswinkel zwischen den neuen Punkten

$$L = \sum_{k=1}^{K-1} |a_{k+1} - a_k| \quad : \text{Länge der Fehlerortskurve}^1 \quad (5.3-5)$$

mit $l_k = |G_F(j\omega_{k+1}) - G_F(j\omega_k)|$

$$L_\Delta = \sum_{k=1}^{K-2} |\Delta a_{k+1} - \Delta a_k| \quad : \text{Gesamtheit der Längenänderungen} \quad (5.3-6)$$

mit $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$.

6. Anwendungsbeispiele

6.1 Fortführung aus Abschnitt 2.2

Für den linearen Prozeß (2.2-1), der nur nichtparametrisch durch Frequenzgangwerte gegeben ist, wird mit den dimensionsähnlichen Kenngrößen aus Abschnitt 5.3 durch schrittweises Hinzufügen einzelner Teilmodelle (PT₁-Glieder) der Form

$$G_{M0}(j\omega_k) = \frac{1}{1+j\omega_k T_M} \quad (6.1-1)$$

ein Prozeßmodell entwickelt. Die Optimierung dafür nicht wird im Unterschied zum Abschnitt 2.2 vollständig numerisch vorgenommen. Einziger freier Modellparameter ist dabei in jedem Schritt die Zeitkonstante T_M .

Schritt 1:

Der erste Modellansatz enthält außer dem variablen Teilmodell (6.1-1) noch kein bekanntes Teilmodell:

$$G_M(j\omega_k) = G_{M0}(j\omega_k) = \frac{1}{1+j\omega_k T_M} \quad (6.1-2)$$

Der Frequenzgang des Fehlermodells nach (4.1-1) ist mit (2.2-1) und (6.1-2)

$$G_F(j\omega_k) = \frac{G_P(j\omega_k)}{G_M(j\omega_k)} = \frac{1+j\omega_k T_M}{(1+j\omega_k T_1)(1+j\omega_k T_2)(1+j\omega_k T_3)} \quad (6.1-3)$$

mit $\omega_k = k\Delta\omega$, $k = 0, 1, 2, \dots, K = 200$, $\Delta\omega = 0,0005s^{-1}$
 $T_M = 0, 1s, 2s, \dots, 150s$.

Die Fehlerortskurven zu (6.1-3) werden der Übersicht halber nur grob für $T_M=0, 10s, 20s, \dots, 150s$ angegeben, Bild 6.1-1.

¹ Zwar sollte die Gesamtheit der Basislängen nach den Ausführungen des Abschnittes 5.2 als Kenngröße für die Liniendimension möglichst vermieden werden, doch wurden dort konstante Basislängen pro Linienobjekt vorausgesetzt. Bei realen Objekten wie z.B. Ortskurven besteht diese Voraussetzung i. allg. nicht. Deshalb ist es gerechtfertigt, über die Sinnfälligkeit von (5.3-5) erst nach praktischer Prüfung zu befinden.

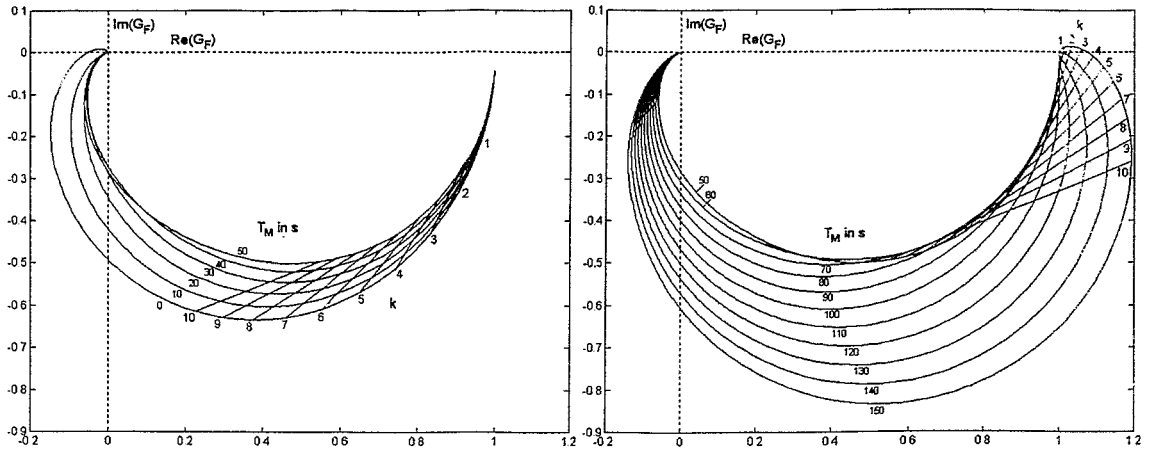


Bild 6.1-1 Ortskurven des Fehlermodells (6.1-3) für $\omega_k = k\Delta\omega$, $\Delta\omega = 0,0005\text{s}^{-1}$ bei Variation der Modellzeitkonstanten $T_M = 0, 10, 20, \dots, 150\text{s}$. Gleiche Frequenzen sind für $k = 1, 2, \dots, 10$ durch Hilfslinien markiert. Um Kurvenüberschneidungen zu vermeiden, ist die Darstellung geteilt.

Augenscheinlich variieren die Fehlerortskurven in ihrer Länge. Die minimale Länge besteht bei etwa $T_M = 60\text{s}$. Zudem werden etwa für $T_M > 140\text{s}$ gemäß (5.3-4) $z = 3$ statt sonst $z = 2$ Quadranten durchlaufen. Ein Bezug zu den Prozeßzeitkonstanten T_1, T_2, T_3 ist dabei nicht sichtbar.

Die dimensionsähnlichen Kenngrößen $\phi, \phi_\Delta, L, L_\Delta$ nach (5.3-2), (5.3-3), (5.3-5), (5.3-6) als Funktion von $T_M = 0, 1, 2, \dots, 150\text{s}$ zeigt das Bild 6.1-2.

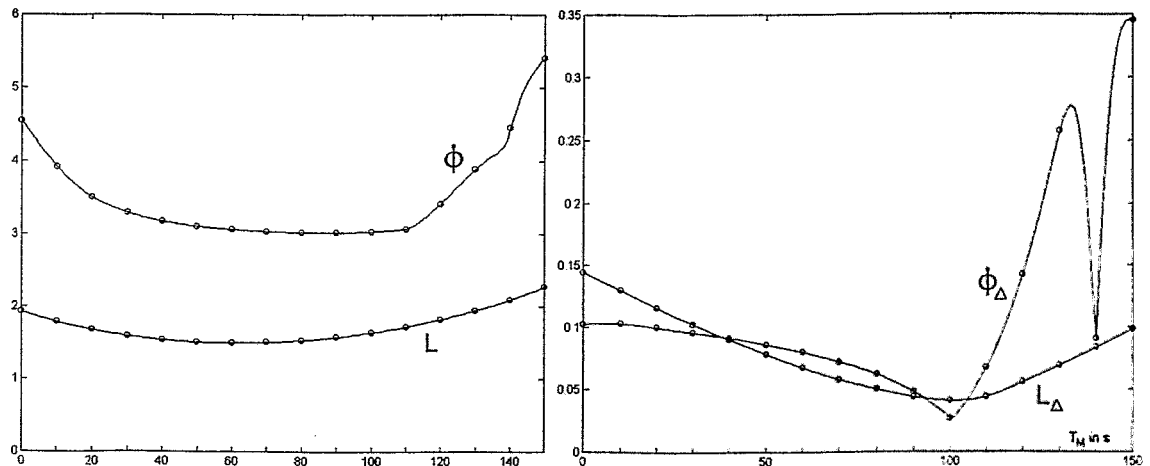


Bild 6.1-2 Die Kenngrößen der Fehlerortskurven als Funktion der Modellzeitkonstanten T_M beim Schritt 1 der Modellbildung

Zwar hat $L(T_M)$ wie schon festgestellt nach ein schwach ausgeprägtes Minimum bei etwa $T_M = 60\text{s}$, doch hat dieses keinen sichtbaren Bezug zu den Prozeßzeitkonstanten T_1, T_2, T_3 . Die Kenngröße nach (5.3-5) hat deshalb im vorliegenden Beispiel keine praktische Bedeutung.

Aus $\phi(T_M)$ ist ein schwach ausgeprägtes Minimum bei etwa $T_M = 90\text{s}$ erkennbar; es könnte auf die Prozeßzeitkonstante $T_1 = 100\text{s}$ hinweisen.

Besser ausgeprägt ist das Minimum von $L_\Delta(T_M)$ bei etwa $T_M = 100\text{s}$; es weist bereits recht deutlich auf T_1 hin.

Deutlich spitze Minima gibt es nur in $\phi_{\Delta}(T_M)^1$. Das globale Minimum liegt dort genau bei $T_M=100s$. Damit ist die Prozeßzeitkonstante T_1 sicher nachgewiesen bzw. das erste Teilmodell genau bestimmt. Das erste Teilmodell entfällt damit aus dem Fehlermodell (s. im Abschnitt 3).

Die Zeitkonstanten T_2 und T_3 beeinflussen zwar den Verlauf der Kurve $\phi_{\Delta}(T_M)$, dies aber zu wenig, um eigene Minima hervorzurufen; das T_1 -Minimum dominiert zu stark. Für T_2 und T_3 können sich Minima erst dann ausbilden, wenn T_1 an der Modellbildung nicht mehr beteiligt ist.²

Ein tiefes Nebenminimum von ϕ_{Δ} , das zudem auffallend spitz ist, liegt bei $T_M=140s$. Es widerspiegelt die Summenzeitkonstante T_S nach (2.2-2). Die hervorstechende Form des Nebenminimums deutet an, daß das Modell (2.2-2) im vorliegenden Fall ein gutes Näherungsmodell für das Prozeßverhalten ist.

Damit die Lage des Nebenminimums von ϕ_{Δ} nicht als Zeitkonstante eines Teilmodells fehlgedeutet werden kann, wird L_{Δ} hinzugezogen: beide Kenngrößen müssen minimal sein.

Schritt 2:

Neben dem variablen Teilmodell (6.1-1) enthält der zweite Modellansatz bereits ein bekanntes Teilmodell:

$$G_M(j\omega_k) = \frac{1}{1+j\omega_k T_1} \cdot \frac{1}{1+j\omega_k T_M} \quad (6.1-4)$$

Weil das bekannte Teilmodell wegfällt, ist der Frequenzgang des Fehlermodells nach (4.1-1) mit (2.2-1) und (6.1-4)

$$G_F(j\omega_k) = \frac{G_P(j\omega_k)}{G_M(j\omega_k)} = \frac{1+j\omega_k T_M}{(1+j\omega_k T_2)(1+j\omega_k T_3)} \quad (6.1-5)$$

mit $\omega_k = k\Delta\omega$, $k = 0, 1, \dots, K = 200$, $\Delta\omega = 0,002s^{-1}$
 $T_M = 0, 1s, 2s, \dots, 60s$.

Weil T_1 als die größte Prozeßzeitkonstante nicht an (6.1-5) beteiligt ist, wird dieses Fehlermodell in einem höheren Frequenzbereich betrachtet als das Fehlermodell (6.1-3). Die Fehlerortskurven zu (6.1-5) für $T_M=0, 10, 20, \dots, 60s$ zeigt das Bild 6.1-3.

¹ Die Formen dieser Minima entsprechen am ehesten den erwarteten nadelförmigen Dimensionsminima, vgl. Bild 1.2-3.

² Dieser unterschiedliche Einfluß der Teilmodelle erschwert es, Rasterstrukturen lokaler Optima nachzuweisen (s. in [Ho97]). Diese Problematik wird zwar im vorliegenden Bericht nicht weiter ausgeführt, ist aber trotzdem Gegenstand begleitender Untersuchungen.

Augenscheinlich besteht die kleinste Länge dieser Fehlerortskurven bei etwa $T_M=20s$. Zudem werden etwa für $10s < T_M < 30s$ nach (5.3-4) $z=1$ statt sonst $z=2$ Quadranten durchlaufen. Ein Bezug zu den Prozeßzeitkonstanten T_2, T_3 ist aber wiederum nicht sichtbar.

Die dimensionsähnlichen Kenngrößen $\phi, \phi_\Delta, L, L_\Delta$ als Funktion von $T_M=0, 1, 2, \dots, 60s$ zeigt das Bild 6.1-4.

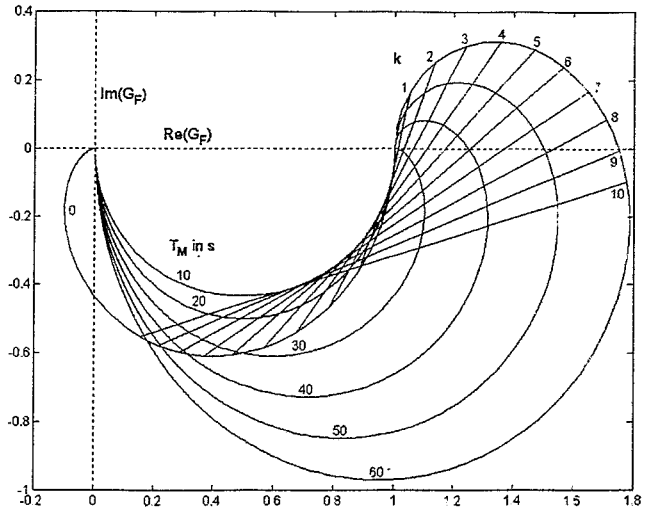


Bild 6.1-3 Ortskurven des Fehlermodells (6.1-5) für $\omega_k = k\Delta\omega$, $\Delta\omega=0,002s^{-1}$ bei Variation der Modellzeitkonstanten $T_M=0, 10, 20, \dots, 60s$. Gleiche Frequenzen sind für $k=1, 2, \dots, 10$ durch Hilfslinien markiert.

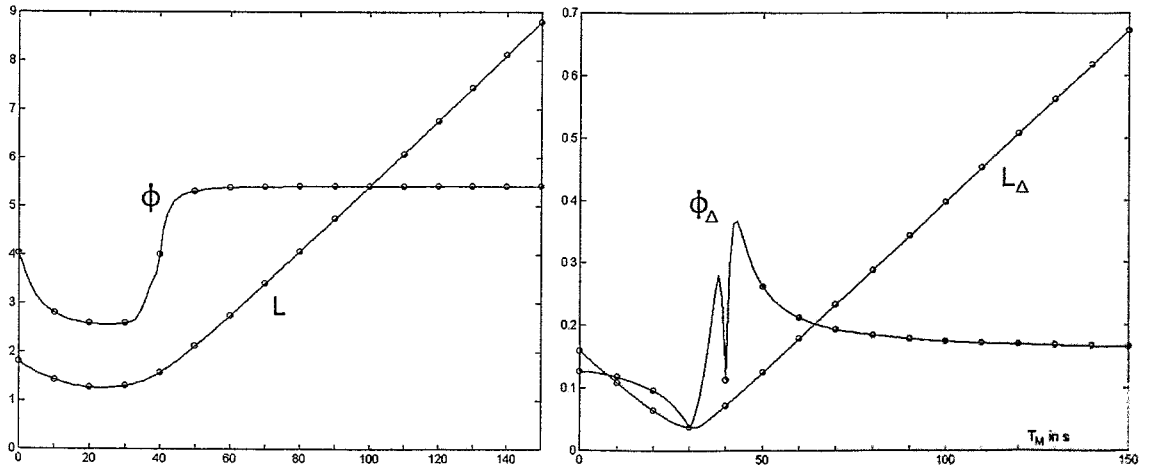


Bild 6.1-4 Die Kenngrößen der Fehlerortskurven als Funktion der Modellzeitkonstanten T_M beim Schritt 2 der Modellbildung

Am aussagekräftigsten sind wieder $L_\Delta(T_M)$ und $\phi_\Delta(T_M)$. Diesmal befindet sich das globale ϕ_Δ -Minimum bei $T_M=30s$. Weil dieser Wert durch das L_Δ -Minimum bestätigt wird, ist die Prozeßzeitkonstante $T_2=30s$ sicher nachgewiesen bzw. das zweite Teilmodell genau bestimmt. Damit entfällt auch das zweite Teilmodell aus dem Fehlermodell.

Wie schon in Schritt 1 hat ϕ_Δ ein Nebenminimum. Diesmal liegt es bei $T_M=40s$ und gehört zur Summenzeitkonstanten des noch unbekanntem Prozeßbestandteils, also zu den noch nicht bestimmten Zeitkonstanten T_2 und T_3 :

$$T_M = T_S = T_2 + T_3 = 40s.$$

$$(6.1-6)$$

Schritt 3:

Neben dem variablen Teilmodell (6.1-1) enthält der dritte Modellansatz bereits zwei bekannte Teilmodelle:

$$G_M(j\omega_k) = \frac{1}{(1+j\omega_k T_1)(1+j\omega_k T_2)} \cdot \frac{1}{1+j\omega_k T_M} \quad (6.1-7)$$

Weil die bekannten Teilmodelle wegfallen, ist der Frequenzgang des Fehlermodells nach (4.1-1) mit (2.2-1) und (6.1-7)

$$G_F(j\omega_k) = \frac{G_P(j\omega_k)}{G_M(j\omega_k)} = \frac{1+j\omega_k T_M}{1+j\omega_k T_3} \quad (6.1-8)$$

Die Fehlerortskurven zu (6.1-8), auf deren Darstellung verzichtet wird, entarten für $T_M=10s$ zu einem Punkt auf der reellen Achse. Weil ein Punkt 0-dimensional ist, gilt somit die Prozeßzeitkonstante $T_3=10s$ als sicher nachgewiesen und somit das auch das dritte Teilmodell als genau bestimmt. Unabhängig davon ergibt sich bereits aus (6.1-6) durch Umformung

$$T_3 = T_s - T_2 = 40s - 30s = 10s.$$

Schritt 4:

Hier soll lediglich gezeigt werden, daß ein vierter Schritt eigentlich überflüssig ist.

Neben dem variablen Teilmodell (6.1-1) enthält der vierte Modellansatz drei bekannte Teilmodelle:

$$G_M(j\omega_k) = \frac{1}{(1+j\omega_k T_1)(1+j\omega_k T_2)(1+j\omega_k T_3)} \cdot \frac{1}{1+j\omega_k T_M} \quad (6.1-9)$$

Weil alle bekannten Teilmodelle wegfallen, ist der Frequenzgang des Fehlermodells nach (4.1-1) mit (2.2-1) und (6.1-9)

$$G_F(j\omega_k) = \frac{G_P(j\omega_k)}{G_M(j\omega_k)} = 1+j\omega_k T_M \quad (6.1-10)$$

Die zugehörige Fehlerortskurve entartet diesmal für $T_M=0$ zum Punkt. Dann ist $G_M(j\omega_k)=G_P(j\omega_k)$, d.h. der variable Teil des Modellansatzes ist weggefallen. Dies bestätigt, daß(6.1-1) gar nicht erst ein viertes Mal eingeführt zu werden braucht.

Das Verschwinden des Modellfehlers ist ein Sonderfall, mit dem praktisch kaum zu rechnen ist. Reale Prozesse können i. allg. nicht durch ein endliches Modell beschrieben werden. Dann ist es sinnvoll, die Modellbildung bei hinreichend kleinem Modellfehler abzubrechen.

6.2 Signalanalyse

Aus einem zeitlich unbegrenzten Signal können aus praktischen Gründen nur zeitbegrenzte Abschnitte analysiert werden. Ein solcher Abschnitt, d.h. ein zeitbegrenztes Signal soll als Überlagerung aus linear unabhängigen Teilsignalen (harmonischen Funktionen) modelliert werden. Dies geschieht zunächst herkömmlich per Fourieranalyse und danach durch Minimierung der Fehlerdimension, wobei wieder die dimensionsähnlichen Kenngrößen aus dem Abschnitt 5.3 Verwendung finden.

Das betrachtete Signal ist zeitdiskret und besteht aus drei Teilsignalen (Bild 6.2-1):

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \quad (6.2-1)$$

mit $S_1 = 20 \cdot \sin(13 \cdot \omega_0 \cdot k)$, $S_2 = 35 \cdot \sin(37 \cdot \omega_0 \cdot k)$, $S_3 = 15 \cdot \sin(148 \cdot \omega_0 \cdot k)$: Teilsignale
 $\omega_0 = 2\pi \cdot 0,0001$: Grundfrequenz
 $k = 0, 1, 2, \dots, K = 1000$: Zeitparameter

Die Teilsignale unterscheiden sich nur in Amplitude und Frequenz. Die Phase als möglicher dritter freier Parameter ist der Übersichtlichkeit halber null gesetzt.

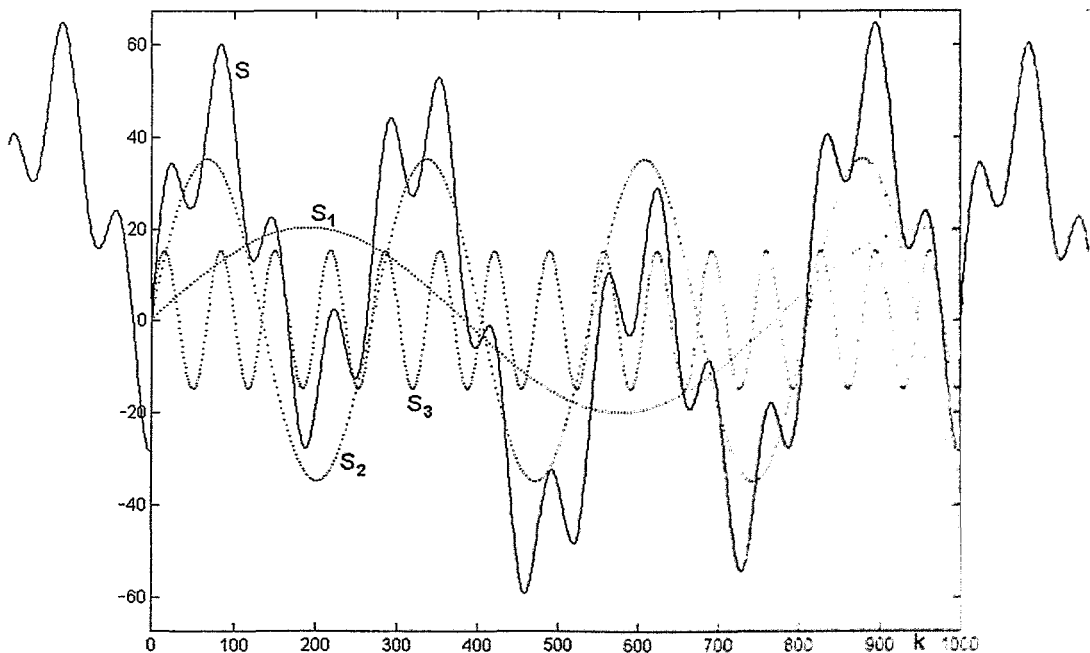


Bild 6.2-1 Das zeitbegrenzte originale Signal S (durchgezogen) als Überlagerung der Teilsignale S_1 , S_2 , S_3 (gepunktet). Die Fortsetzung über den vorgegebenen Zeitbereich (im Bild durch das Skalenfenster markiert) hinaus ist Teil einer periodischen Fortsetzung. Erkennbar ist, daß diese Fortsetzung Sprünge mit sich bringt.

Die Fourieranalyse approximiert das zeitbegrenzte originale Signal S als Überlagerung aus zeitlich unbegrenzten orthonormalen trigonometrischen Basissignalen (harmonischen Schwingungen). Dazu werden die einzelnen (frequenzdiskreten) Basissignale so gewichtet (Fourier-Koeffizienten), daß der Fehler zwischen dem

Signal S und seinem Modell im quadratischen Mittel minimal ist. Notwendige Voraussetzung für die Darstellung als Fourierreihe ist die Periodizität des zu beschreibenden Signals. Da ein zeitbegrenzt Signal diese Voraussetzung nicht erfüllt, wird es formal periodisch fortgesetzt¹.

Die Fourierreihe des Signals S , dargestellt für den unteren Frequenzbereich und durch die Beträge der komplexen Fourier-Koeffizienten, zeigt das Bild 6.2-2.

Die frequenzbestimmenden Faktoren 13, 37 und 148 (s. in (6.2-1)) widerspiegeln sich in Überhöhungen bei $z=1$ ($\approx 0,1 \cdot 13$), $z=4$ ($\approx 0,1 \cdot 37$) und $z=15$ ($\approx 0,1 \cdot 148$).

Außerdem zeigt die Fourierreihe die Wirkung der Sprünge, welche die periodische Fortsetzung mit sich bringt: Alle Frequenzen des relevanten Frequenzbereiches $\{0, \Delta\omega, \dots, K/2 \cdot \omega_0\}$ (s. Abtasttheorem) sind vertreten.

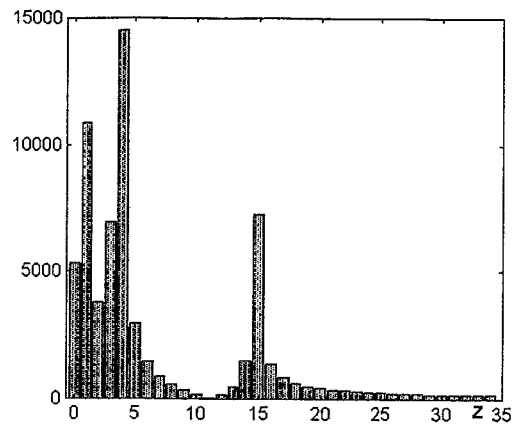


Bild 6.2-2 Beträge der Fourierkoeffizienten von S für $\Delta\omega \cdot z$ mit $\Delta\omega = 2\pi/K = 2\pi \cdot 0,001 = 10 \cdot \omega_0$ und $z=0,1,2,\dots,35$.

Eine Signalmodellierung durch die Minimierung der Fehlerdimension erfolgt anhand der dimensionsähnlichen Kenngrößen aus Abschnitt 5.3 durch schrittweises Hinzufügen einzelner Signal-Teilmodelle der Form

$$S_{M0} = A \cdot \sin(z \cdot \omega_0 \cdot k) \quad (6.2-2)$$

mit A : Amplitude

z : Frequenzfaktor, ($A, z = 0, 1, 2, \dots$)

Schritt 1:

Der erste Modellansatz enthält außer dem variablen Teilmodell (6.2-2) noch kein bekanntes Signalmodell:

$$S_M = S_{M0} = A \cdot \sin(z \cdot \omega_0 \cdot k) \quad (6.2-3)$$

Nach (4.2-2) mit (6.2-1) und (6.2-3) ist das Signal-Fehlermodell

$$S_F = S - S_M = S_1 + S_2 + S_3 - A \cdot \sin(z \cdot \omega_0 \cdot k). \quad (6.2-4)$$

Weil S_F in A und z variabel ist, erscheinen die dimensionsähnlichen Kenngrößen

¹ Die periodische Fortsetzung kann zu einem erheblich verfälschten Signalmodell führen, denn bei einem nichtganzzahligen Verhältnis zwischen der Breite des vorgegebenen Signalabschnittes und den Perioden der verwendeten harmonischen Basissignale kommt es zu Sprüngen im Signal, siehe im Bild 6.2-1. Diese Sprünge verfälschten alle Fourierkoeffizienten. Sie täuschen dabei insbesondere Frequenzen vor, die im zeitunbegrenzten Originalsignal gar nicht vorkommen (Leckeffekt oder Leakage) [Kr91, S.48].

ϕ , ϕ_Δ , L , L_Δ ¹ als Funktionen über einer Fläche. Im Unterschied zum Beispiel im Abschnitt 6.1 zeigt sich dabei, daß alle vier Kenngrößen (wider Erwarten auch L !) ähnlich gut ausgeprägte Minima aufweisen. Deshalb wird stellvertretend nur noch ϕ (Gesamtheit der Basiswinkel entlang von S_F , vgl. (5.3-2)) weiter betrachtet. Das Bild 6.2-3 gibt den Funktionswert von $\phi(z, A)$ als Schwärzungsgrad wieder.

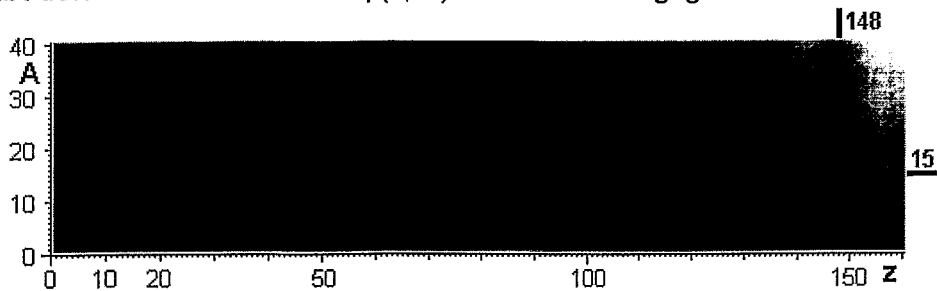


Bild 6.2-3 Kenngröße $\phi(z,A)$ des Signalmodellfehlers beim Schritt 1 der Modellbildung. Hervorgehoben sind die Koordinaten des globalen Minimums.

Die Funktion $\phi(z,A)$ hat ein gut ausgeprägtes globales Minimum für $z^*=148$ und $A^*=15$. Zur besseren Verdeutlichung dieses Minimums zeigt Bild 6.2-4 die Schnitte $\phi(z,A^*)$ und $\phi(z^*,A)$. Offensichtlich wird z und damit die Frequenz viel schärfer identifiziert als die Amplitude A .

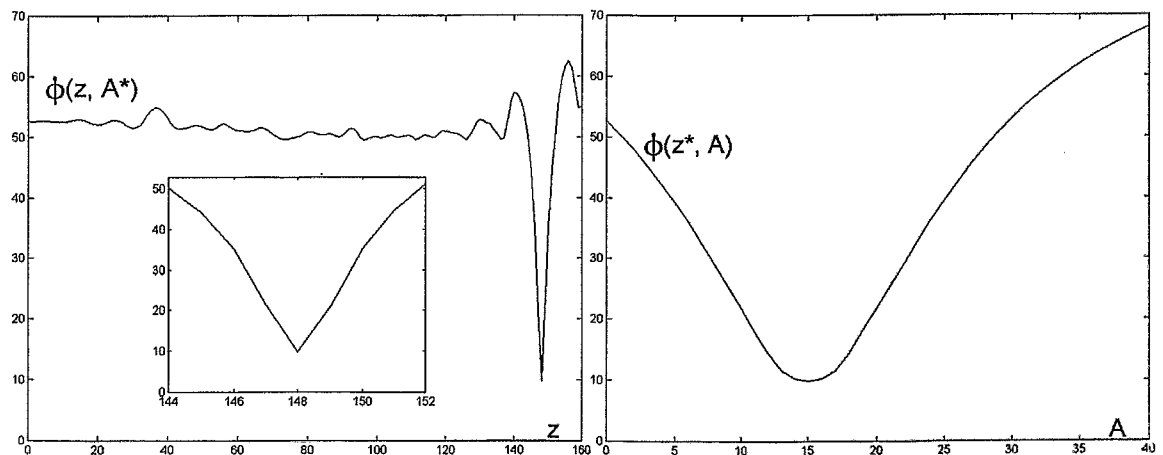


Bild 6.2-4 Die Lage des globalen Minimums im Bild 6.2-3, verdeutlicht durch die Schnittfunktionen $\phi(z, A^*)$ und $\phi(z^*, A)$

Damit gilt das Teilsignal S_3 und somit das erste Signalmodell als genau bestimmt. Analog zu dem bereits im vorigen Beispiel festgestellten Effekt sind die Parameter von S_1 und S_2 (noch) nicht durch Minima repräsentiert. Die Teilmodelle haben also wiederum sehr unterschiedliches Gewicht im Fehlermodell.

¹ Diese Kenngrößen wurden zwar für (Fehler-)Ortskurven entwickelt, werden hier aber unverändert für das zeitbegrenzte Fehlersignal S_F angewandt.

Schritt 2:

Neben dem variablen Teilmodell (6.2-2) enthält der zweite Modellansatz bereits ein bekanntes Signalmodell:

$$S_M = S_3 + A \cdot \sin(z \cdot \omega_0 \cdot k). \quad (6.2-5)$$

Nach (4.2-2) mit (6.2-1) und (6.2-5) ist das Fehlersignal

$$S_F = S - S_M = S_1 + S_2 - A \cdot \sin(z \cdot \omega_0 \cdot k). \quad (6.2-6)$$

Im zweiten Modellbildungsschritt ergibt sich $\phi(z, A)$ so, wie es das Bild 6.2-5 erkennen lässt.

Diesmal hat $\phi(z, A)$ ein globales Minimum für $z^* = 37$, $A^* = 36$. Dessen genaue Lage und Gestalt verdeutlicht das Bild 6.2-6 durch die Schnitte $\phi(z, A^*)$ und $\phi(z^*, A)$.

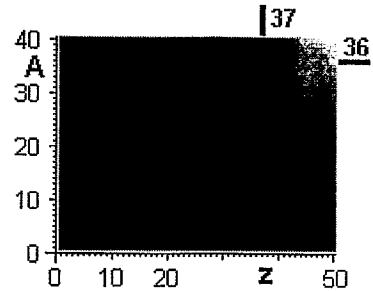


Bild 6.2-5 $\phi(z, A)$ beim Schritt 2 der Modellbildung

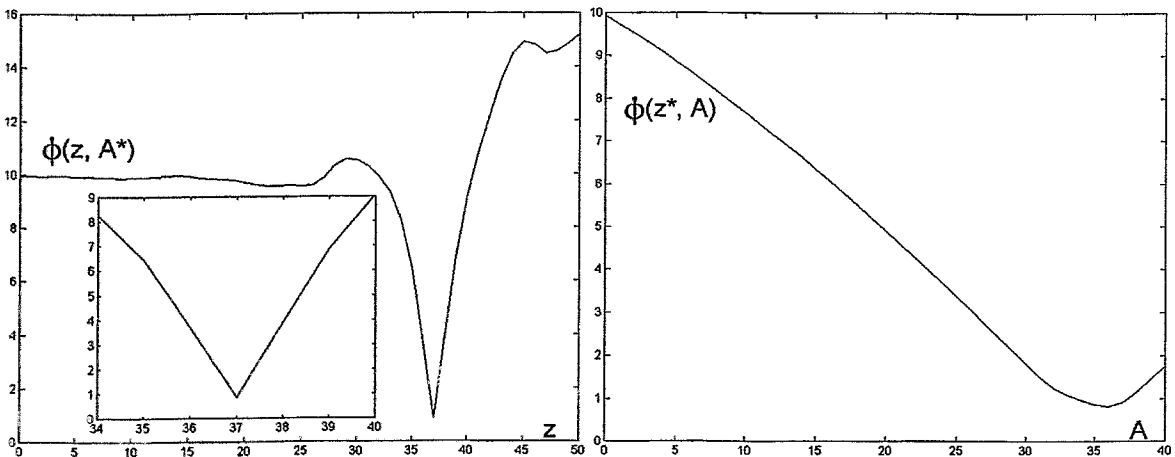


Bild 6.2-6 Die Lage des globalen Minimums im Bild 6.2-5, verdeutlicht durch die Schnittfunktionen $\phi(z, A^*)$ und $\phi(z^*, A)$

Die Identifikation war hier nicht exakt, denn statt des zu S_2 gehörenden Amplitudenwertes $A=35$ wurde der Wert $A=36$ gefunden.

Schritt 3:

Nach der ungenauen Schätzung im Schritt 2 ist nun der Modellansatz

$$S_M = S_3 + 36 \cdot \sin(\omega_0 \cdot 37 \cdot k) + A \cdot \sin(z \cdot \omega_0 \cdot k) \quad (6.2-7)$$

und folglich das Fehlersignal

$$S_F = S_P - S_M = S_1 + S_2 - 36 \cdot \sin(\omega_0 \cdot 37 \cdot k) - A \cdot \sin(z \cdot \omega_0 \cdot k). \quad (6.2-8)$$

Im dritten Modellbildungsschritt ergibt sich $\phi(z, A)$ entsprechend dem Bild 6.2-7.

Diesmal hat $\phi(z, A)$ ein globales Minimum für $z^* = 13$, $A^* = 19$. Dessen genaue Lage und Gestalt verdeutlicht das Bild 6.2-8.

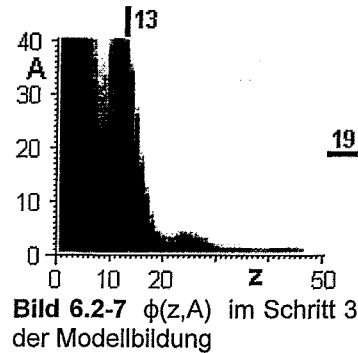


Bild 6.2-7 $\phi(z, A)$ im Schritt 3 der Modellbildung

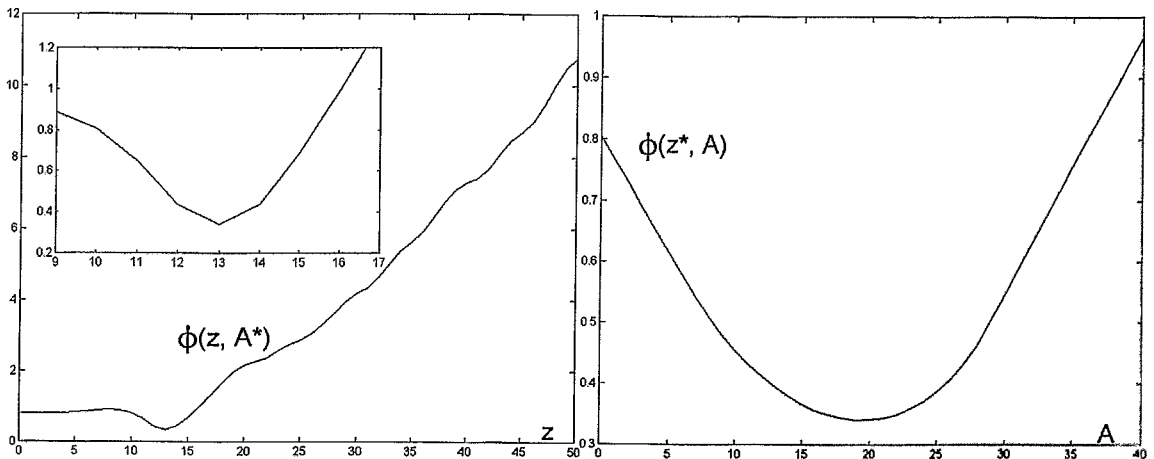


Bild 6.2-8 Die Lage des globalen Minimums im Bild 6.2-7, verdeutlicht durch die Schnittfunktionen $\phi(z, A^*)$ und $\phi(z^*, A)$

Auch hier war die Identifikation nicht exakt, denn statt der zur S_1 gehörenden Amplitudenwertes $A=20$ wurde der Wert $A=19$ gefunden.

Schritt 4:

Nach den beiden ungenauen Schätzungen ist nun der Modellansatz

$$S_M = S_3 + 19 \cdot \sin(\omega_0 \cdot 13 \cdot k) + 36 \cdot \sin(\omega_0 \cdot 37 \cdot k) + A \cdot \sin(z \cdot \omega_0 \cdot k) \quad (6.2-9)$$

und folglich das Fehlersignal

$$S_F = S_P - S_M = S_1 + S_2 - 19 \cdot \sin(\omega_0 \cdot 13 \cdot k) - 36 \cdot \sin(\omega_0 \cdot 37 \cdot k) - A \cdot \sin(z \cdot \omega_0 \cdot k) \quad (6.2-10) \\ = \sin(\omega_0 \cdot 13 \cdot k) - \sin(\omega_0 \cdot 37 \cdot k) - A \cdot \sin(z \cdot \omega_0 \cdot k).$$

Dieser Fehler, welcher der Restfehler aus den vorherigen Schritten ist, ist vergleichsweise klein. Über die Sinnfälligkeit einer Fortsetzung der Modellbildung soll deshalb anhand des Bildes 6.2-9 entschieden werden. Dieses Bild zeigt das Fehlersignal S_F nach allen bisherigen Schritten der Modellbildung.

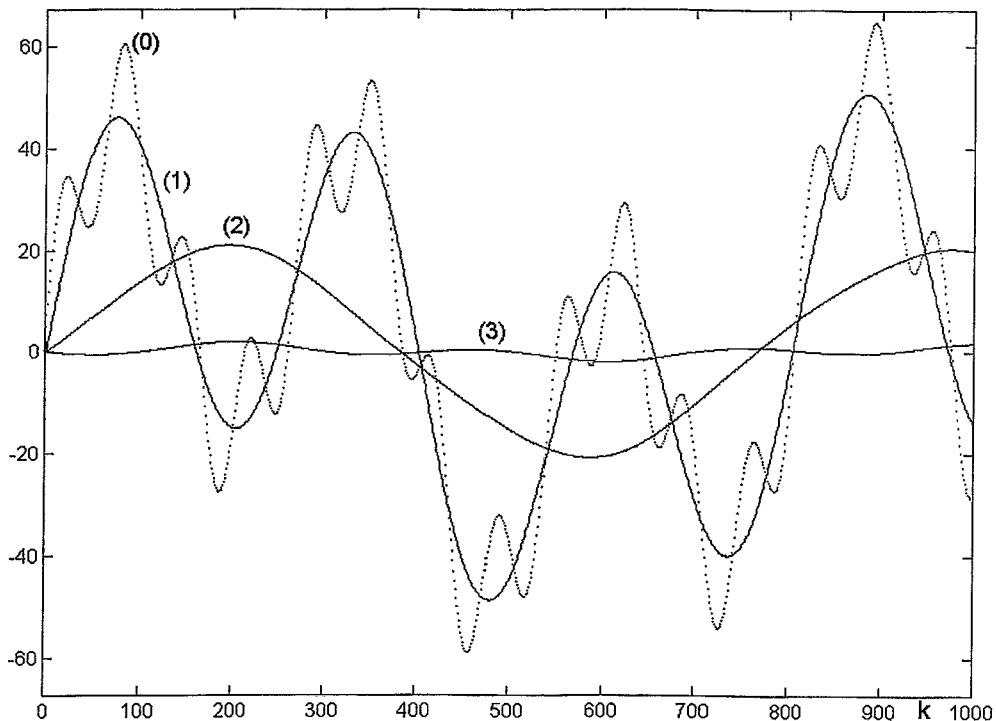


Bild 6.2-9 Fehlersignal S_F , jeweils für
 (0): gemäß (6.2-4) mit $A=0$, also $S_F=S$ (noch ohne Schätzung)
 (1): gemäß (6.2-4) mit $A^*=15$, $z^*=148$ (nach Schritt 1)
 (2): gemäß (6.2-6) mit $A^*=36$, $z^*=37$ (nach Schritt 2)
 (3): gemäß (6.2-8) mit $A^*=19$, $z^*=13$ (nach Schritt 3)

Während der Fehler zunächst nur geringfügig abnahm, ist er im Schritt 3 fast ganz verschwunden. Unter Vernachlässigung des Restfehlers wird die Modellbildung deshalb ohne die Ausführung eines vierten Schrittes abgebrochen.

Hervorgehoben sei noch der Unterschied zur Fourieranalyse, vgl. Bild 6.2-2. Dort wäre es bei weitem nicht ausreichend, das Originalsignal S mit nur drei Basissignalen vergleichbar genau zu approximieren.

6.3 Punktkinetik von Kernreaktoren

Bei Kernreaktoren geringer räumlicher Ausdehnung und geringer Leistung (z.B. Forschungsreaktoren) gilt das sog. punktkinetische Reaktormodell [As65]. Es beschreibt einen nichtlinearen (speziell bilinearen) dynamischen Prozeß. Wegen der Nichtlinearität sind im Prozeßverhalten zustandsabhängig unterschiedliche Eigenschaften dominant. Deshalb gelten für unterschiedliche Betriebsbedingungen des Reaktors unterschiedliche Vereinfachungen des punktkinetischen Modells. Zwei solche Vereinfachungen werden vorgegeben; sie könnten experimentell getrennt bestimmt worden sein. Gesucht wird das Gesamtmodell, in das die beiden Teilm Modelle eingebettet sind.

1. Teilmodell: (dynamisches Modell, Nulleistungsmodell)

$$\dot{n}(t) = \frac{\rho(t) - \beta}{l} n(t) + \lambda c(t) \quad (6.3-1a)$$

$$\dot{c}(t) = \frac{\beta}{l} n(t) - \lambda c(t) \quad (6.3-1b)$$

mit $\rho(t)$: Reaktivität (Eingangsgröße),
 $n(t)$: Neutronendichte (Zustands- und Ausgangsgröße)
 $c(t)$: Dichte neutronenaussendender Kernzerfallsprodukte (Zustandsgröße)
 $\beta = 0,0064$, $\lambda = 0,1s^{-1}$: Parameter (kernphysikalische Konstanten)
 $l = 0,005s$: Anlagenkonstante

gültig für

$$|\rho(t)| \leq 0,1\beta, \quad (6.3-1c)$$

$$n(t) \geq n_0 = \text{konst.} \gg 0, \quad n_0: \text{niedriger Arbeitspunkt (sog. Nulleistung)} \quad (6.3-1d)$$

2. Teilmodell: (stationäres Modell für den unterkritischen Reaktor)

$$\rho_s = -\frac{1}{v_s}, \quad v_s \sim n_s \quad (6.3-2a,b)$$

mit $v=v(t)$: heuristisch eingeführte, nicht näher bezeichnete Hilfsgröße
 ρ_s, v_s, n_s : stationäre Werte

gültig für

$$\dot{n} = \dot{c} = 0 \quad \text{bei} \quad n = n_s = \text{konst.}, \quad n_0 \gg n_s > 0 \quad (6.3-2c)$$

$$c = c_s = \frac{\beta}{\lambda} n_s$$

$$\rho_s = \text{konst.} \ll -0,1\beta, \quad (6.3-2d)$$

$$v_s = \text{konst.} > 0, \quad (6.3-2e)$$

Die zur Dimensionsbetrachtung verlangte Unabhängigkeit der Teilmodelle ist hierbei dadurch gegeben, daß sich die Gültigkeitsbereiche (6.3-1c) und (6.3-2d) sowie (6.3-1d) und (6.3-2c) nicht überschneiden.

Verfahrensbedingt muß nun ein Teilmodell variiert werden ¹. Eine Variation der vorhandenen Parameter β , λ , l kommt dafür nicht in Betracht, denn sie sind fest vorgegeben. Also müssen neue Parameter eingeführt werden. Eine Orientierung dafür bietet die Tatsache, daß sich die Teilmodelle widerspruchsfrei zusammenfügen lassen müssen. Um die gegebenen Teilmodelle auf Widerspruchsfreiheit zu prüfen, wird das 1. Teilmodell (6.3-1a,b) unter der Gültigkeitsbedingung (6.3-2c) des 2. Teilmodells betrachtet:

$$0 = \frac{\rho_s - \beta}{l} n_s + \lambda c_s$$

$$0 = \frac{\beta}{l} n_s - \lambda c_s$$

Daraus folgt

$$\rho_s = 0 \quad (6.3-3)$$

Zwischen (6.3-3) und (6.3-2d) besteht ein Widerspruch. Zur Beseitigung dieses Widerspruchs erfolgt in (6.3-1a) unter Beachtung von (6.3-2a,b)² die Erweiterung

$$\rho(t) \rightarrow \rho(t) + \frac{1}{a \cdot n(t)} \quad (6.3-4)$$

mit a als freiem Parameter. (6.3-1a) wird mit (6.3-4) modifiziert zu

$$\dot{n}(t) = \frac{\rho(t) + \frac{1}{a \cdot n(t)} - \beta}{l} n(t) + \lambda c(t) \quad (6.3-5)$$

Um zur Bestimmung von a wieder Frequenzgangmethoden nutzen zu können, wird das modifizierte 1. Teilmodell (6.3-5), (6.3-1b) am stationären Zustand $n_s = \text{konst.}$,

$c_s = \frac{\beta}{\lambda l} n_s$, $\rho_s = -\frac{1}{a \cdot n_s}$ und für $n_s = 1$ linearisiert. Daraus folgt der Frequenzgang

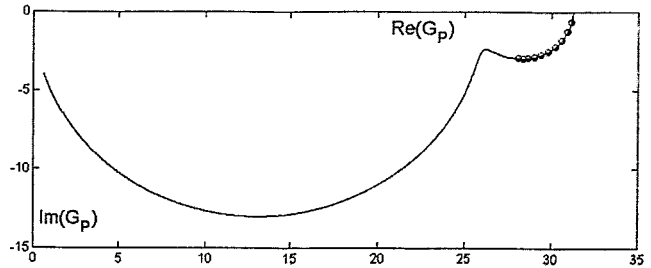
$$G_M(j\omega_k) = \frac{\frac{n_s}{l} (j\omega_k + \lambda)}{(j\omega_k)^2 + j\omega_k \left(\lambda + \frac{\beta}{l} + \frac{1}{a n_s l} \right) + \frac{q\lambda}{a n_s l}} \quad (6.3-6)$$

Der an gleichen stationären Zustand am Prozeß experimentell bestimmte Frequenzgang $G_P(j\omega_k)$ ist durch die Ortskurve im Bild 6.3-1 gegeben.

¹ Wenn nach der Optimierung des einen Teilmodells die Unabhängigkeit des zweiten Teilmodells noch bestehen sollte, wäre mit diesem entsprechend zu verfahren.

² v_s wird wegen der nachgewiesenen Proportionalität (6.3-2b) ersetzt durch n_s und zu $n(t)$ verallgemeinert

Bild 6.3-1 Frequenzgang-Ortskurve des Prozesses bei Stationarität für $n_s=1$, $\omega_k=k\Delta\omega$, $k=0, 1, 2, \dots, 5000$, $\Delta\omega=0,01s^{-1}$ mit Markierungen (Kreise) für $k=1, 2, \dots, 10$



Vom Fehlerfrequenzgang $G_F(j\omega_k)$ gemäß (4.1-1) sind für $a=0,05\beta^{-1}s^{-1}$ mit $z=1, 2, \dots, 10$ die Ortskurven im Bild 6.3-2 dargestellt.

Weil die Fehlerortskurve für $z=4$ zum Punkt entartet, ist auch ohne Dimensionsbetrachtung klar, daß $a=0,2\beta^{-1}s$ der richtige Wert ist. Zur Probe wird dieser Wert in (6.3-5) eingesetzt. Im stationären Zustand für $n_s=1$ ist dann $\rho_s=-5\beta$. Dies ist ein mit der Bedingung (6.3-2d) verträgliches und auch praktisch sinnvolles Ergebnis; es kennzeichnet den abgeschalteten Reaktor.

Das modifizierte und identifizierte 1. Teilmodell ist bereits das gesuchte Gesamtmodell. Es lautet in der üblichen, physikalisch begründeten Form

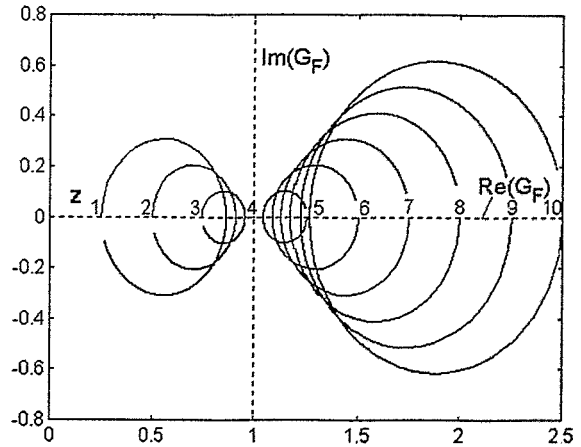
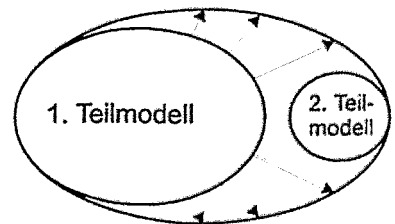


Bild 6.3-2 Fehlerortskurven für $a=0,05\beta^{-1}s^{-1}$ mit $z=1, 2, \dots, 10$

$$\begin{aligned} \dot{n}(t) &= \frac{\rho(t) - \beta}{I} n(t) + \lambda c(t) + q \\ \dot{c}(t) &= \frac{\beta}{I} n(t) - \lambda c(t) \end{aligned} \quad (6.3-7)$$

mit $q = \frac{n_s}{Ia} = 1000\beta s^{-1}$: Dichte des Quellneutronen-Zuflusses (z.B. aus der kosmischen Höhenstrahlung stammend).

Das modifizierte 1. Teilmodell (6.3-7) schließt das 2. Teilmodell in sich ein¹, Bild 6.3-3. Das 2. Teilmodell braucht somit nicht weiter berücksichtigt zu werden.



modifiziertes 1. Teilmodell

Bild 6.3-3 Gültigkeitsbereiche der Teilmodelle (schematisch)

¹ Aus (6.3-7) folgt für $\dot{n}=\dot{c}=0$ und $n = n_s$ gemäß (6.3-2a,b): $\rho_s = -\frac{q}{n_s}$

7. Zusammenfassung und Ausblick

Anhand von methodischen Betrachtungen und an verschiedenen Beispielen mit linearen oder linearisierten Prozessen wurde gezeigt, daß als Gütemaße für die Parameteridentifikation dimensionsähnliche Kenngrößen gebildet werden können, welche

- sich für den schrittweisen Aufbau von Modellstrukturen eignen, dafür
- immer nur auf ein einzelnes Teilmodell des Prozesses Bezug zu nehmen brauchen und
- die exakte Bestimmung einzelner Teilmodelle daran erkennen lassen, daß die Kenngrößen genügend spitze Minima (spitz geformte Funktionsverläufe der Kenngrößen im Bereich der Minima) aufweisen.

Mit diesen Kenngrößen kann die Modellbildung wie beabsichtigt vergleichsweise einfach und zielgerichtet durchgeführt werden. Dies ist ein Vorteil gegenüber herkömmlichen Modellbildungsverfahren. Als nachteilig ist dagegen zu nennen, daß es keine allgemeingültigen Kenngrößen gibt. Zweckmäßige dimensionsähnliche Kenngrößen müssen weitgehend problem- oder prozeßspezifisch formuliert werden und dies ist dann schwierig, wenn zu wenig A-priori-Information vorliegt.

Weiterführende Untersuchungen werden sich der systematischen Gewinnung dimensionsähnlicher Kenngrößen widmen und dafür gegebenenfalls Elemente der Mustererkennung, der evolutionären Prinzipien und der statistischen Informationstheorie heranziehen. Dabei wird auch an frühere eigene Arbeiten angeknüpft [Ho98], [Ho97]. Zudem sollen die bisher noch nicht berücksichtigten Möglichkeiten des Auftretens von konjugiert komplexen Polen/Nullstellen und von Nichtminimalphasigkeit bei Übertragungsfunktionen sowie von Störeinflüssen (z.B. Meßstörungen) untersucht werden.

Ein besonderer Untersuchungsschwerpunkt wird eine Problematik sein, die an einem nichtlinearen Prozeß (Abschnitt 6.3) nur beiläufig gezeigt wurde. Sie betrifft die Nutzung des Konzeptes der Fehlerdimension für die Zusammenführung sich widersprechender Teilmodelle zu einem widerspruchsfreien Gesamtmodell.

Anhang: Die Dimensionsanalyse als Teil der Ähnlichkeitstheorie

Das Verfahren der Dimensionsanalyse ist sehr vielseitig und dient u.a. dazu, Bedingungen für das Bestehen von Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen Objekten (z.B. zwischen einem Prozeß und seinem Modell) zu formulieren. Als Maße für Ähnlichkeiten dienen sog. Ähnlichkeitsparameter bzw. -kennzahlen. Im Unterschied zu den Objektparametern haben die Ähnlichkeitsparameter keine physikalische Dimension. Zwei Objekte sind in einem bestimmten Betrachtungsrahmen (z.B. für bestimmte Parameter) einander ähnlich, wenn ihre diesbezüglichen Ähnlichkeitsparameter gleich groß sind.

Traditionell wird die Dimensionsanalyse u.a. in der Strömungsdynamik genutzt, um beispielsweise zu klären, unter welchen Bedingungen geometrisch verkleinerte Strömungsmodelle zur Nachbildung originaler großer Strömungen geeignet sind. Ein wichtiger Ähnlichkeitsparameter ist dabei die Reynolds-Zahl. Sie muß für die Original- und die Modellströmung gleich sein.

Um die Objektparameter in einer Form darzustellen, die nicht vom gewählten Maßsystem abhängt, wird jeder Ähnlichkeitsparameter als ein dimensionsloses Potenzprodukt aus den Objektparametern formuliert. Die Anzahl der notwendigen Ähnlichkeitsparameter bestimmt das sog. π -Theorem:

Eine Funktion f zwischen n dimensionsbehafteten Objektparametern x_1, x_2, \dots, x_n , die mit m voneinander unabhängigen Basisparametern y_1, y_2, \dots, y_m gemessen werden ($m < n$), besitzt $n-m$ unabhängige dimensionslose Argumente (die Ähnlichkeitsparameter, π -Kennzahlen) $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}$.

Die Bedingung für Ähnlichkeit lautet nun: Die Werte der Objektparameter können sich beliebig ändern, solange die π -Kennzahlen konstant bleiben.

An die Anzahl der Objektparameter x_1, x_2, \dots, x_n und die Art des funktionellen Zusammenhanges zwischen ihnen werden keine Bedingungen gestellt. Ausreichend ist die Gewißheit, daß ein Zusammenhang wirklich besteht. Um dies auszudrücken, genügt die allgemeine Parameterfunktion

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = c, \quad c: \text{dimensionslose Konstante.} \quad (\text{A-1})$$

Die Funktion f wird wie gefordert unabhängig vom gewählten Maßsystem, indem sie auch als Potenzprodukt

$$f = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} = c. \quad (\text{A-2})$$

formuliert wird. Dabei heißen die (unbekannten) Exponenten q_1, q_2, \dots, q_n auch Dimensionen von f . Alle Objektparameter werden mit vorgegebenen Basisparametern y_1, y_2, \dots, y_m als Potenzprodukte

$$x_i = y_1^{d_{1i}} y_2^{d_{2i}} \dots y_m^{d_{mi}} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A-3})$$

ausgedrückt, wobei die Exponenten $d_{1i}, d_{2i}, \dots, d_{mi}$ bekannt sind. Mit (A-3) geht (A-2) über in

$$\begin{aligned}
f &= x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n} \\
&= (y_1^{d_{11}} y_2^{d_{21}} \dots y_m^{d_{m1}})^{q_1} (y_1^{d_{12}} y_2^{d_{22}} \dots y_m^{d_{m2}})^{q_2} \dots (y_1^{d_{1n}} y_2^{d_{2n}} \dots y_m^{d_{mn}})^{q_n} \\
&= y_1^{d_{11}q_1 + d_{12}q_2 + \dots + d_{1n}q_n} y_2^{d_{21}q_1 + d_{22}q_2 + \dots + d_{2n}q_n} \dots y_m^{d_{m1}q_1 + d_{m2}q_2 + \dots + d_{mn}q_n} \\
&= c = y_1^0 y_2^0 \dots y_m^0 .
\end{aligned} \tag{A-4}$$

Durch Exponentenvergleich an den Basisparametern folgt aus (A-4) das Gleichungssystem

$$Dq = 0 \tag{A-5}$$

$$\text{mit } D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & \dots \\ d_{21} & d_{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & d_{mn} \end{pmatrix}, \quad q = (q_1 \dots q_n)^T .$$

Wegen $r_D = \text{Rang}(D) \leq m$ und $m < n$ hat (A-5) $(n-r_D)$ -fach unendlich viele Lösungen. Also sind r_D Unbekannte als Funktion der restlichen $n-r_D$ Unbekannten, deren Werte allerdings frei wählbar sind, bestimmbar. Die daraufhin entstehenden $n-r_D$ Lösungen bilden die dimensionslosen π -Kennzahlen bzw. Ähnlichkeitsparameter.

Ein Beispiel verdeutlicht allgemeine Zusammenhänge. Ein zweites Beispiel stellt einen regelungstechnischen Bezug her.

Beispiel A-1: Von (geometrischen) Kreisen sei zunächst nur bekannt, daß sie mit den $n=2$ Parametern Radius r {cm} und Umfang u {cm} beschrieben werden können. Der einzige ($m=1$) hierfür benötigte Basisparameter ist die Länge L {cm}. Mit $r, u = x_1, x_2$ ist nach (A-1) und (A-2)

$$f(x_1, x_2) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} = r^{q_1} u^{q_2} = c . \tag{A-6}$$

Die Objektparameter werden gemäß (A-4) durch ihren Basisparameter substituiert:

$$\begin{aligned}
L^{q_1} L^{q_2} &= L^0 L^0 \\
L^{q_1+q_2} &= L^0
\end{aligned} \tag{A-7}$$

Durch Exponentenvergleich folgt aus (A-7)

$$q_1 + q_2 = 0. \tag{A-8}$$

Wegen $n-m=2-1=1$ gibt es nur einen Ähnlichkeitsparameter. Also ist in (A-8) eine der beiden Unbekannten frei wählbar. Mit der Wahl $q_2=1$ folgt $q_1=-1$ und somit ist nach (A-6) der Ähnlichkeitsparameter

$$\pi_1 = r^{-1} u^1 = \frac{u}{r} \quad (A-9)$$

Um seine Bedeutung für die Beziehung zwischen Original bzw. Prozeß (P) und Modell (M) zu zeigen, wird

$$\frac{\pi_{1,P}}{\pi_{1,M}} = 1 \quad (A-10a)$$

gesetzt bzw. durch Quotientenbildung mit (A-6)

$$\frac{f_P(r_M, u_P)}{f_M(r_M, u_M)} = \left(\frac{u_P}{u_M} \right)^{-1} \left(\frac{r_P}{r_M} \right)^1 = \left(\frac{c_P}{c_M} \right)^0 = 1 \quad (A-10b)$$

Daraus folgt

$$\frac{u_M}{r_M} = \frac{u_P}{r_P} \quad (A-11)$$

Nach (A-11) müssen u und r stets im gleichen Verhältnis zueinander stehen, wohingegen ihre Absolutwerte bedeutungslos sind. Folglich können im Rahmen der Parameter u und r beliebige Kreise füreinander Original und Modell sein. Daß sie sich in ihrer Fläche ggf. nicht ähneln, bleibt dabei unberücksichtigt.

Als dritter (n=3) Parameter wird jetzt die Kreisfläche A berücksichtigt und dies auf zweierlei Weise.

(1) Indem für A die Einheit {cm²} als bekannt vorausgesetzt wird, ist wieder die Länge L als einziger Basisparameter verwendbar (m=1). Mit (A-6) und A=x₃ ist

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} x_3^{q_3} = r^{q_1} u^{q_2} A^{q_3} = c \quad (A-12)$$

Statt (A-7) gilt jetzt

$$\begin{aligned} L^{q_1} L^{q_2} L^{2q_3} &= L^0 L^0 L^0 \\ L^{q_1+q_2+2q_3} &= L^0 \end{aligned} \quad (A-13)$$

Daraus folgt durch Exponentenvergleich

$$q_1 + q_2 + 2q_3 = 0 \quad (A-14)$$

Wegen n-m=3-1=2 gibt es nun zwei Ähnlichkeitsparameter. Also sind in (A-14) zwei der drei Unbekannten frei wählbar. Mit der Wahl q₂=1, q₃=0 folgt wie schon oben q₁=-1. Mit der zweiten Wahl q₂=0, q₃=1 folgt q₁=-2. Damit sind nach (A-12) die Ähnlichkeitsparameter

¹ Die Verwandtschaft zur Definition der Kreiszahl $\pi = 3,14\dots = \frac{u}{2r}$ ist offensichtlich, wenn auch die ähnliche Symbolik zufällig ist; (A-9) hätte ebenso reziprok geschrieben werden können, denn mit Ähnlichkeitsparametern sind alle Operationen erlaubt, die keine physikalischen Dimensionen einführen.

$$\pi_1 = r^{-1} u^1 = \frac{u}{r}, \quad \pi_2 = r^{-2} A^1 = \frac{A}{r^2}. \quad (\text{A-15})$$

Nach π_2 können Kreise dann füreinander Original und Modell sein, wenn A und r^2 im gleichen Verhältnis zueinander stehen.¹

(2) Nun sei die Maßeinheit der Kreisfläche A unbekannt. Deshalb wird für A ein eigenständiger Basisparameter F eingeführt. Damit ist $m=2$. Statt (A-13) ist

$$\begin{aligned} L^{q_1} L^{q_2} F^{q_3} &= L^0 L^0 F^0 \\ L^{q_1+q_2} F^{q_3} &= L^0 F^0 \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

und aus dem Exponentenvergleich folgt

$$q_1 + q_2 = 0, \quad q_3 = 0. \quad (\text{A-17a,b})$$

Wegen $n-m=3-2=1$ gibt es hier nur einen Ähnlichkeitsparameter. Aus (A-17a) folgt derselbe Ähnlichkeitsparameter π_1 wie aus (A-8). Um die Bedeutung von q_3 festzustellen, wird die Quotientenbildung mit (A-12) allein mit der Lösung aus (A-17a) vorgenommen:

$$\frac{f_P(r_M, u_P, A_P)}{f_M(r_M, u_M, A_M)} = \left(\frac{u_P}{u_M} \right)^{-1} \left(\frac{r_P}{r_M} \right)^1 \left(\frac{A_P}{A_M} \right)^{q_3} = \left(\frac{c_P}{c_M} \right)^0 = 1 \quad (\text{A-18})$$

Die Beziehung (A-18) ist für beliebige q_3 nur bei $A_M=A_P$ erfüllt. Also müssen das Original und das Modell in ihren Flächen übereinstimmen. Diese Forderung nach Übereinstimmung wird verallgemeinert für alle Parameter, die zwar eingeführt sind, aber in den Ähnlichkeitsparametern nicht erscheinen.

Beispiel A-2: Von Frequenzgängen nach

$$G(j\omega) = \frac{K(1+j\omega T')}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} \quad (\text{A-19})$$

sei nur bekannt, daß zu ihrer Beschreibung $n=5$ Parameter

statische Verstärkung	K	{ Ω } (ohmscher Widerstand),
Zeitkonstanten	T_1, T_2, T'	{s} und
Frequenz	ω	{1/s}

gebraucht werden. Die dafür benötigten $m=2$ Basisparameter seien

ohmscher Widerstand	R	{ Ω } und
Zeit	T	{s}.

¹ An dem Beispiel zeigt sich eine weitere Anwendungsmöglichkeit der Dimensionsanalyse, nämlich die Erzeugung bisher unbekannter funktionaler Zusammenhänge: Indem $\pi_1=\pi_2$ gesetzt wird, entsteht unmittelbar die Formel $A=u \cdot r$.

Mit $K, T_1, T_2, T', \omega = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ ist nach (A-1) und (A-2)

$$f(x_1, x_2, \dots, x_5) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_5^{q_n} = K^{q_1} \omega^{q_2} T_1^{q_3} T_2^{q_4} T'^{q_5} = c \quad (\text{A-20})$$

Die Objektparameter werden gemäß (A-4) durch ihre Basisparameter substituiert:

$$\begin{aligned} (T^0 R^1)^{q_1} (T^{-1} R^0)^{q_2} (T^1 R^0)^{q_3} (T^1 R^0)^{q_4} (T^1 R^0)^{q_5} &= T^0 R^0 \\ R^{q_1} (T^{-1})^{q_2} T^{q_3} T^{q_4} T^{q_5} &= T^0 R^0 \\ T^{-q_2+q_3+q_4+q_5} R^{q_1} &= T^0 R^0 \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

Durch Exponentenvergleich folgt aus (A-21) das Gleichungssystem

$$Dq = \underline{0} \quad (\text{A-22})$$

$$\text{mit } D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = (q_1 \dots q_5)^T.$$

Wegen $\text{Rang}(D)=2=m$ hat (A-22) $n-m=3$ -fach unendlich viele Lösungen. Also sind m Unbekannte bestimmbar. Bestimmt werden q_1, q_2 als Funktion der frei wählbaren Unbekannten q_3, q_4, q_5 . Mit den Zerlegungen

$$D = (A - B) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$q = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix}$$

folgt aus (A-22)

$$Ax = Bu \quad (\text{A-23})$$

Für (A-23) können so viele unabhängige Lösungen gebildet werden, wie es linear unabhängige (Basis-)Vektoren der Länge von u gibt. Als Basisvektoren werden Einheitsvektoren gewählt. Diese werden zu einer $(n-m, n-m)$ -Matrix U zusammengestellt:

$$U = (\underline{e}_1 \ \underline{e}_2 \ \underline{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-24})$$

Entsprechend wird x zur (m, m) -Matrix X erweitert. Damit folgt nach (A-23)

$$X = A^{-1}BU = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-25})$$

und schließlich ist

$$\begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T . \quad (\text{A-26})$$

Wegen $n-m=5-2=3$ gibt es drei Ähnlichkeitsparameter. Die Zeilen in (A-26) bestimmen nach (A-20) die Ähnlichkeitsparameter wie folgt:

$$\pi_1 = K^0 \omega^1 T_1^1 T_2^0 T'^0 = \omega T_1 , \quad (\text{A-27a})$$

$$\pi_2 = K^0 \omega^1 T_1^0 T_2^1 T'^0 = \omega T_2 , \quad (\text{A-27b})$$

$$\pi_3 = K^0 \omega^1 T_1^0 T_2^0 T'^1 = \omega T' . \quad (\text{A-27c})$$

Um die Bedeutung dieser Ähnlichkeitsparameter für die Beziehung zwischen Original bzw. Prozeß (P) und Modell (M) zu erhellen, wird

$$\frac{\pi_{1,P}}{\pi_{1,M}} = \frac{\pi_{2,P}}{\pi_{2,M}} = \frac{\pi_{3,P}}{\pi_{3,M}} = 1$$

gesetzt. Daraus folgt

$$\frac{1}{\omega_P} = \frac{T_{1,P}}{T_{1,M}} = \frac{T_{2,P}}{T_{2,M}} = \frac{T'_P}{T'_M} . \quad (\text{A-28})$$

Nach (A-28) müssen die reziproke Frequenz und die Zeitkonstanten in konstantem Verhältnis zueinander stehen, wobei der Wert des Quotienten nicht festgelegt ist. Folglich kann z.B. ein langsamer ablaufender (niederfrequenter) Vorgang schnell (mit höherer Frequenz) modelliert werden, wenn entsprechend (A-28) die Modellzeitkonstanten entsprechend klein sind.

Die statische Verstärkung K kommt in den Ähnlichkeitsparametern nicht vor. Ihr Wert darf sich deshalb zwischen dem Prozeß und dem Modell nicht unterscheiden (zur Begründung siehe voriges Beispiel).

Literatur

- [As65] Ash, M.: Nuclear reactor kinetics. McGraw Hill, 1965
- [Bu72] Burmeister, H.-L.: Theoretische Regelungstechnik. Teil 3: Lineare Übertragungsglieder. Lehrbrief, TU Dresden, 1972
- [Ed90] Edgar, G.A.: Measure, Topology, and Fractal Geometry. Springer-Verlag, 1990
- [Ho97] Hoppe, D., Schneider, J.: Nutzung genetischer Algorithmen zur Identifikation von Gesteinsschichten. Freiburger Forschungshefte A 839 Automatisierungstechnik, S. 146-159, TU Bergakademie Freiberg, 1997
- [Ho98] Hoppe, D.: Nutzung der statistischen Informationstheorie eines tensororientierten Klassifizierungsverfahrens zur Signalerkennung an einem chemischen Prozeß. Bericht FZR-225 im Forschungszentrum Rossendorf, 1998
- [HQ95] Heise, W., Quattrocchi, P.: Informations- und Codierungstheorie. Springer-Verlag, 1995
- [Kr91] Kronmüller, H.: Digitale Signalverarbeitung. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991
- [Lu88] Lunze, J.: Robust Multivariable Feedback Control. Akademie-Verlag, Berlin, 1988
- [PI92] Pleitgen: Bausteine des Chaos - Fraktale. Springer-Verlag, 1992
- [St68] Strobel, H.: Systemanalyse mit determinierten Testsignalen. Verlag Technik, Berlin, 1968
- [Tr80] Truckenbrodt, E.: Fluidmechanik. Springer-Verlag, 1980