

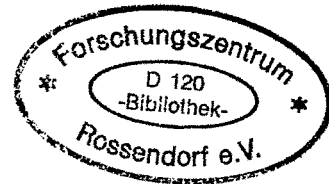
WISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE BERICHTE

**FZR-306**

November 2000

ISSN 1437-322X

Archiv-Ex.:



*Dietrich Hoppe*

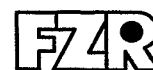
**Methodische Grundlagen für die  
Tomographie durch gefilterte Rückprojektion  
an einer Axialpumpe**

Herausgeber:  
FORSCHUNGSZENTRUM ROSSENDORF  
Postfach 51 01 19  
D-01314 Dresden  
Telefon +49 351 26 00  
Telefax +49 351 2 69 04 61  
<http://www.fz-rossendorf.de/>

Als Manuskript gedruckt  
Alle Rechte beim Herausgeber

**FORSCHUNGSZENTRUM ROSSENDORF**

WISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE BERICHTE



**FZR-306**

November 2000

*Dietrich Hoppe*

**Methodische Grundlagen für die  
Tomographie durch gefilterte Rückprojektion  
an einer Axialpumpe**

*Projektbericht*

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wird mit Mitteln des SMWK unter dem Kennzeichen 4-7531.50-03-0370-993 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt der Arbeit liegt allein beim Autor.

## **Kurzfassung**

Ein zweiphasiges, aus einer gashaltigen Flüssigkeit bestehendes Medium wird in einer Axialpumpe von einem propellerartigen Laufrad senkrecht zur Drehachse dieses Laufrades transportiert. Die Wechselwirkung zwischen der Gasphase und dem Laufrad soll unter Verwendung von Gamma-Strahlung mittels Tomographie untersucht werden. Dabei ist für die Rekonstruktion des Objektbildes das Prinzip der sogenannten gefilterten Rückprojektion vorgesehen. Die methodischen Grundlagen für die Nutzung dieses Prinzips unter den vorgesehenen geometrischen und meßtechnischen Bedingungen sind Gegenstand dieser Arbeit.

## Inhalt

1. Einleitung .....	1
2. Problemstellung .....	2
2.1 Das Objekt .....	2
2.2 Die Meßanordnung .....	3
2.3 Projektionsfunktionen und Sinogramm .....	4
3. Das Prinzip der gefilterten Rückprojektion .....	6
3.1 Die Parallelprojektion .....	6
3.1.1 Projektion einer Objektfunktion .....	6
3.1.2 Radon-Transformation eines punktförmigen Objektes .....	8
3.1.3 Inverse Radon-Transformation für ein punktförmiges Objekt .....	9
3.2 Die Gefilterte Rückprojektion bei der Zentralprojektion .....	15
4. Simulationen .....	19
4.1 Rückprojektion und Filterung .....	19
4.2 Interpolationen .....	21
4.3 Bestimmung der Gasverteilung .....	23
4.4 Stochastische Meßstörungen .....	25
5. Zusammenfassung .....	28
Anhang 1: Spline-Interpolation (kubisch) .....	29
Anhang 2: Meßstochastik .....	30
Literatur .....	31

## 1. Einleitung

In einer Axialpumpe transportiert ein propellerartiges Laufrad eine gashaltige Flüssigkeit parallel zur Drehachse des Laufrades. Dabei führt die schnelle Rotation des Laufrades zu komplizierten turbulenten Wechselwirkungen zwischen den Gasblasen und den Flügeln des Laufrades. Diesbezüglich ist unter anderem das Phänomen der Kavitation von Interesse. Die Kavitation mindert den Wirkungsgrad der Pumpe und bringt starke erosive Belastungen der Laufradflügel mit sich.

Weil sich das Laufrad und das Medium bewegen, sowohl absolut als auch relativ zueinander, ist die Untersuchung der genannten Wechselwirkungen erheblich erschwert. Vorgesehen ist deshalb, die Untersuchungen mittels Tomographie durchzuführen. Die Axialpumpe wird dann in einer Ebene senkrecht zur Drehachse des Laufrades in Zentralprojektion von Gamma-Strahlung durchdrungen. Die Strahlung wird teilweise absorbiert, woraufhin gegenüber der punktförmigen Strahlungsquelle ein Schattenbild des durchstrahlten Objektes entsteht. Aus dem Schattenbild wird meßtechnisch eine eindimensionale Projektionsfunktion gewonnen. Über eine volle Umdrehung des Laufrades entsteht eine große aber endliche Anzahl solcher Projektionsfunktionen; die Meßanordnung ist dabei ortsfest. Die Laufradposition wird Winkel-äquidistant erfaßt, woraufhin die Projektionsfunktionen leicht über viele Umdrehungen des Laufrades gemittelt werden können. Meßstörungen lassen sich so weitgehend unterdrücken. Aus den Projektionsfunktionen wird tomographisch ein zweidimensionales Schnittbild des durchleuchteten Objektes rekonstruiert. Von der Subtraktion unterschiedlicher rekonstruierter Objektbilder wird schließlich eine quantitative Verteilung des zeitlich mittleren Gasgehaltes der Flüssigkeit erwartet. Einzelne Blasen lassen sich wegen der zeitlichen Mittelung nicht auflösen.

Für die Rekonstruktion des Objektbildes gibt es verschiedene Prinzipien. Näher betrachtet wird das Prinzip der gefilterten Rückprojektion. Dessen mathematische Grundlage bildet die inverse Radon-Transformation (Johann Radon, österr. Mathematiker, 1917). Charakteristisch für dieses Prinzip ist neben einer speziellen Filterung, daß die Funktionswerte in rückwärtiger Richtung der Projektionsstrahlen über die Fläche des Objektbildes aufgetragen (verschmiert) werden. Jede einzelne Projektionsfunktion wird entsprechend ihres zugehörigen Drehwinkels separat rückprojiziert. Alle Rückprojektionen, die zu einer vollständigen Umdrehung des Objektes gehören, werden zu einem Gesamtbild überlagert.

Der vorliegende Bericht soll die Verwendbarkeit der gefilterten Rückprojektion für die gegebene Problemstellung nachweisen und zeigen, welche Ergebnisse unter den vorgesehenen geometrischen und meßtechnischen Bedingungen zu erwarten sind. Berücksichtigt werden das Laufrad der Pumpe, das Pumpengehäuse, das zweiphasige Medium mit einer willkürlich angenommenen Verteilung der Gasphase sowie stochastische Meßstörungen.

Nachdem die Problemstellung weiter konkretisiert ist, wird das Rekonstruktionsprinzip theoretisch begründet. Anhand von Simulationen werden dann nacheinander die Rückprojektion und die Filterung am gegebenen Objekt gezeigt, die Auswirkungen verschiedener Interpolationen der abgetasteten Projektionsfunktionen miteinander verglichen, durch die Subtraktion rekonstruierter Objektbilder die Gasverteilung im Zweiphasenmedium bestimmt und dabei die Wirkung von stochastischen Meßstörungen dargestellt.

## 2. Problemstellung

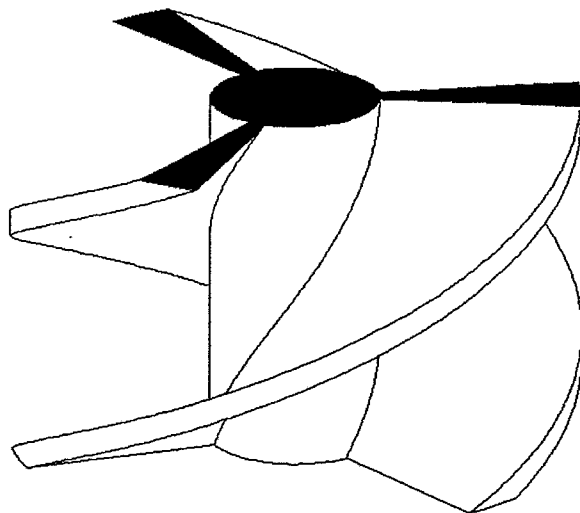
### 2.1 Das Objekt

Die betrachtete Axialpumpe enthält ein propellerartiges, aus drei Flügeln bestehendes Laufrad, Bild 2-1. Wichtige Parameter dieses Laufrades sind:

- Durchmesser der Welle: 75 mm
- Durchmesser über die Flügel (außen): 220 mm
- Steigung der Flügel (außen): 175,2 mm (pro 360°)
- Flügelstärke: 6,5 mm
- Winkelabstand der Flügel: 120°

Das Laufrad ist von einem rohrförmigen bzw. kreissymmetrischen Gehäuse umschlossen. Die Pumpe wird (idealisiert) in einer Ebene senkrecht zur Drehachse des Laufrades durchstrahlt. Der dadurch entstehende Schnitt durch das Laufrad entspricht der geschwärzten Fläche im Bild 2-1.

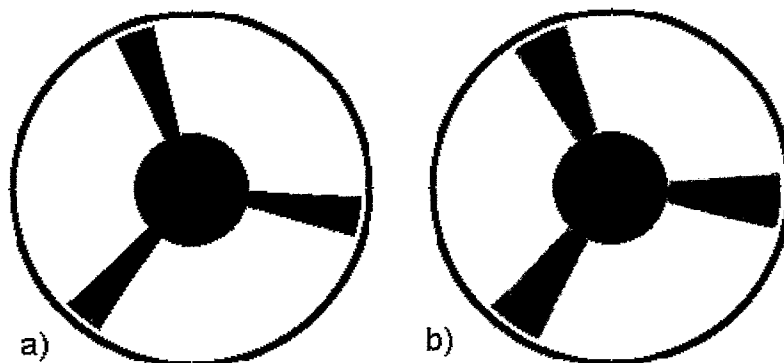
Während das Laufrad rotiert, ist das (im Bild nicht dargestellte) Pumpengehäuse feststehend. Das Gehäuse ist damit relativ zu der ebenfalls feststehenden Meßanordnung (Abschnitt 2.2) in Ruhe. Dies widerspricht zwar dem Wesen der Tomographie, denn sie verlangt eine relative Drehung zwischen der Meßanordnung und dem untersuchten Objekt, doch weil das Gehäuse kreissymmetrisch und zudem in sich homogen ist, darf es als mitrotierend und somit als Teil des untersuchten Objektes angesehen werden. Auch das transportierte Medium gehört zum Objekt, doch davon wird bis auf weiteres abgesehen.



**Bild 2-1**  
Perspektivische Darstellung des Laufrades und der angedeuteten Schnittfläche

Die reale Strahlungsquelle ist nicht punktförmig. Desgleichen die Detektoren, welche die Strahlung empfangen. Daher wird aus dem Objekt keine Fläche, sondern eine (voluminöse) Scheibe ausgeschnitten. Trotzdem wird nur ein ebenes, also flächenhaftes Bild rekonstruiert. Folglich rufen Parameter, die in der Scheibe längs der zusätzlichen Dimension (entlang der Drehachse des Laufrades) variieren, Unschärfen im rekonstruierten Objektbild hervor. Im vorliegenden Fall bewirkt die Steigung der

Propellerflügel eine solche Unschärfe, Bild 2-2<sup>1</sup>. Von zusätzlichen Parallaxen-Effekten sei hier abgesehen.



**Bild 2-2** Sicht entlang der Drehachse des Laufrades auf den durchstrahlten Teil der Pumpe bei  
a) einem ebenen Schnitt bzw. einer 0 mm dicken ausgeschnittenen Scheibe und  
b) einer 5 mm dicken ausgeschnittenen Scheibe, wobei der Schwärzungsgrad eine Funktion der wirksamen Materialdicke ist, homogene Materialverteilung vorausgesetzt

Das Bild 2-2 macht deutlich, daß die Scheibendicke im Interesse einer hohen Bildqualität möglichst gering sein sollte. Konstruktiv werden dahingehend Blenden (Kollimatoren) eingesetzt. Die Problematik der Scheibendicke wird nachfolgend nicht mehr berücksichtigt. Als Objekt gilt deshalb die Darstellung im Bild 2-2a.

## 2.2 Die Meßanordnung

Die tomographische Meßanordnung besteht aus einer Strahlungsquelle S und einem Detektorbogen B, Bild 2-3, auf dem n Detektoren äquidistant über einen Winkel  $\gamma$  kreisbogenförmig angeordnet sind; S befindet sich im Zentrum des gedachten Kreises. Im einzelnen gilt

- $\gamma \in [-30^\circ, 30^\circ]$  : Fächerwinkel<sup>2</sup>
- $n = 64$  : Anzahl der Detektoren auf dem Kreisbogensegment von B
- $R = 735\text{mm}$  : Radius des gedachten Kreises bzw. Abstand zwischen S und B
- $D = 255\text{mm}$  : Abstand zwischen S und dem Drehpunkt des Objektes O.

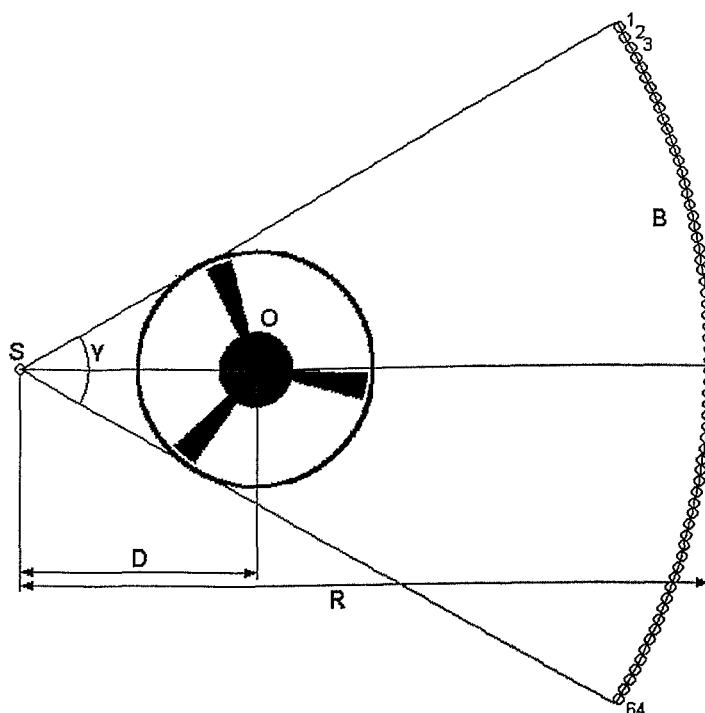
Zwischen der Quelle S und dem Detektorbogen B wird somit eine fächerförmige Ebene aufgespannt. Das Objekt O muß in diesem Fächer vollständig enthalten sein, denn außerhalb des Fächers liegende Teile des Objektes O könnten nicht korrekt rekonstruiert werden. Der Dreh- bzw. Mittelpunkt von O liegt auf der Winkelhalbierenden des Fächers ( $\gamma = 0$ ). O bezeichnet gleichzeitig den Drehpunkt des Objektes.

<sup>1</sup> Bei diesen und allen weiteren Grauwert-Bildern sind die Extreme schwarz/weiß dem kleinsten/größten Wert der Objektfunktion zugeordnet. Einen absoluten Bezug gibt es dabei nicht.

<sup>2</sup> Dieser und alle weiteren Winkel sind im positiven Drehsinn orientiert.



**Bild 2-3**  
Sicht auf die Meßanordnung  
und das enthaltene Objekt  
(Bezeichnungen im Text)



Weil sich die Quelle S im Zentrum des gedachten Kreises befindet, von wo sie divergierende Projektionsstrahlen aussendet, liegt eine Zentralprojektion vor. Das Objekt O absorbiert die Strahlen teilweise und erzeugt dadurch ein Schattenbild auf dem Detektorbogen. Aus dem zweidimensionalen Schattenbild entsteht mit Hilfe der linear angeordneten Detektoren eine eindimensionale Projektionsfunktion.

## 2.3 Projektionsfunktionen und Sinogramm

Ein Projektionsstrahl durchdringt das Objekt und wird dabei durch Absorption in seiner Intensität abgeschwächt. Die Intensität  $I$  entlang des Projektionsstrahls wird differentiell betrachtet:

$$dI(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2)I(x_1, x_2)ds \quad \text{für } \beta, \gamma \quad (2.3-1)$$

$x_1, x_2$ : Basiskoordinaten eines kartesischen Koordinatensystems  $(x_1, x_2)$ , das sich mit dem Objekt dreht und dessen Ursprung im Drehpunkt O des Objektes liegt, Bild 2-4

$s$ : Koordinate des Projektionsstrahls in Richtung des Fächerwinkels  $\gamma$

$ds$ : differentielle Strecke längs des Projektionsstrahls

$I(x_1, x_2)$ : lokale Intensität des Projektionsstrahls

$dI(x_1, x_2)$ : differentielle Intensitätsänderung

$f(x_1, x_2)$ : ortsabhängige Absorptionsfunktion des Objektes (Objektfunktion); sie ist außerhalb einer gewissen Grenze identisch Null

$\beta$ : (Dreh-)Winkel zwischen der Koordinate  $x_2$  und der Winkelhalbierenden des Fächers ( $\gamma = 0$ ), Bild 2-4

Die Integration von (2.3-1) über den Weg des Projektionsstrahls führt auf das Linienintegral

$$\ln \frac{I(s)}{I_0} = - \int_{\text{Strahl}} f(x_1, x_2) ds \quad , \quad (2.3-2)$$

$I_0$ : Strahlintensität am Eintritt in das Objekt.

Als Maß für die Strahlintensität dient die Anzahl  $N$  der nachgewiesenen Gamma-Photonen. Damit ist eine Projektionsfunktion wie folgt bestimmt:

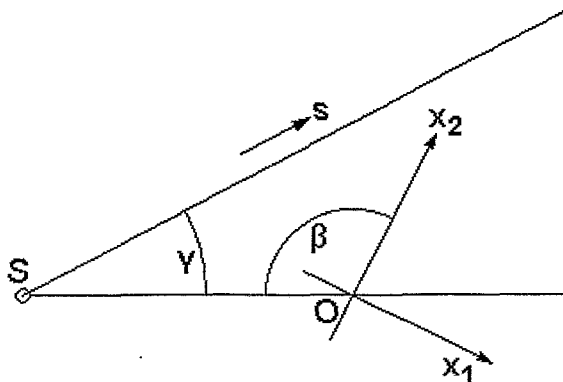
$$R_\beta(\gamma) = \ln \frac{N_0}{N} \Big|_{\beta, \gamma} \quad (2.3-3)$$

$N_0/N$ : Anzahl der Gamma-Photonen, die pro Meßzeit und Projektionsstrahl ins Objekt eintreten/aus ihm austreten

$R_\beta(\gamma)$ : Projektionsfunktion in Abhängigkeit vom Fächerwinkel  $\gamma$  bei jeweils festem Drehwinkel  $\beta$

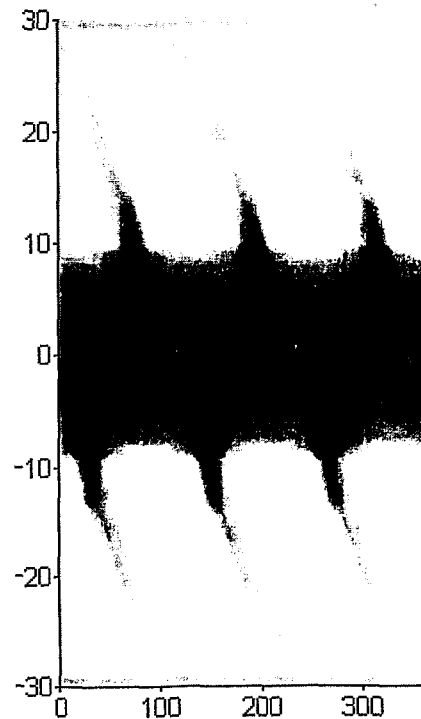
Infolge der Begrenzung von  $f(x_1, x_2)$  in  $(x_1, x_2)$  sind auch alle  $R_\beta(\gamma)$  in  $\gamma$  begrenzt.

**Bild 2-4**  
Schema der Zentralprojektion



Das Objekt (Bild 2-2a) wird in Schritten  $\beta = 1, 2, \dots, 360^\circ$  gegenüber der feststehenden Meßanordnung (Quelle, Detektorbogen) gedreht. Dabei entsteht zu jedem  $\beta$  eine Projektionsfunktion  $R_\beta(\gamma)$ . Durch die Zusammenfassung aller (eindimensionalen) Projektionsfunktionen  $R_\beta(\gamma)$  entsteht die zweidimensionale Projektionsfunktion  $R(\beta, \gamma)$ . Diese Funktion ist als sogenanntes Sinogramm im Bild 2-5 dargestellt. Der Fächerwinkel  $\gamma$  ist hierbei als kontinuierlich angenommen. Tatsächlich ist  $\gamma$  diskontinuierlich, weil jede Projektionsfunktion nur punktuell an den  $n$  Detektorpositionen erfaßt wird. Der kontinuierliche Fall wird aber später für Vergleiche benötigt.

**Bild 2-5** Sinogramm der zweidimensionalen Projektionsfunktion  $R(\beta, \gamma)$  für das Objekt aus Bild 2-2a,  $t: \gamma$ ,  $-\beta$ , beide Winkel in Grad



Die Bildrekonstruktion besteht darin, aus einem vorgegebenen, z.B. meßtechnisch gewonnenen Sinogramm auf das Bild des zugehörigen Objektes zu schließen. Für das Sinogramm im Bild 2-5 geschieht das im Abschnitt 4. Zuvor wird das zur Bildrekonstruktion gewählte Prinzip der gefilterten Rückprojektion näher betrachtet.

### 3. Das Prinzip der gefilterten Rückprojektion

Die zur Bildrekonstruktion vorgesehene Rückprojektion wird gemeinsam mit der (Hin-)Projektion, d.h. der Entstehung von Projektionen behandelt, denn beides sind zueinander inverse Operationen. In der Meßanordnung liegt zwar Zentralprojektion vor, doch wird erst die anschaulichere und einfachere Parallelprojektion betrachtet. Sie wird später für die Geometrie der Zentralprojektion modifiziert.

#### 3.1 Die Parallelprojektion

##### 3.1.1 Projektion einer Objektfunktion

Für die Rekonstruktion des Objektbildes bei Parallelprojektion wird angenommen,

- die Strahlungsquelle  $S$  ist unendlich weit entfernt, weswegen parallele Projektionsstrahlen von ihr eintreffen, vgl. Bild 3-1, und
- die Projektionsfunktion wird senkrecht zur Projektionsrichtung erfaßt.

Des weiteren werden für die Parallelprojektion zum Teil andere Bezeichnungen als für die Zentralprojektion verwendet:

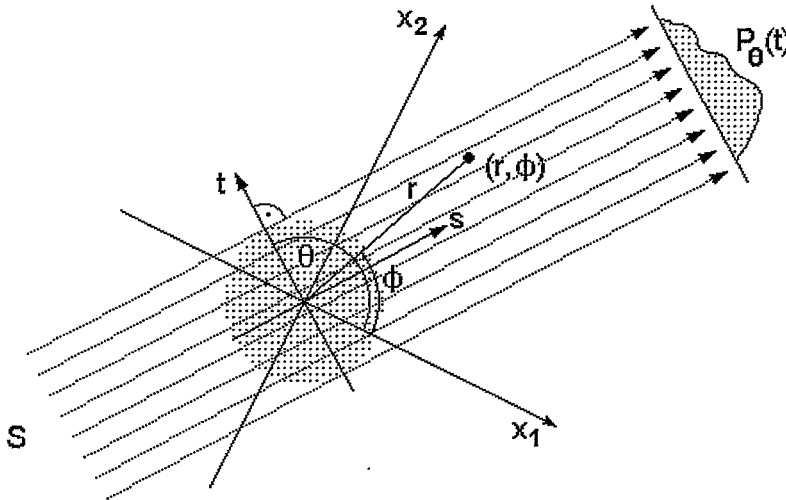
$P_\theta(t)$ : Projektionsfunktion

$s, t$ : Basiskoordinaten eines kartesischen Koordinatensystems  $(s, t)$ ,

welches gegenüber dem Koordinatensystem  $(x_1, x_2)$  gedreht ist, so daß  $s$  in Projektionsrichtung zeigt

$\theta$ : Winkel zwischen den Koordinaten  $x_1$  und  $t$

$r, \phi$ : Polarkoordinaten eines Objektpunktes



**Bild 3-1** Schema der Parallelprojektion. Die gepunktete Kreisfläche deutet das Objekt an. Der Objektpunkt  $(r, \phi)$  ist der Übersicht halber außerhalb des Objektes gezeichnet.

Die Projektionsfunktion entsteht gemäß (2.3-2) und (2.3-3) als Linienintegral

$$P_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) ds \quad (3.1-1)$$

Ein Projektionsstrahl  $s'$ , der einen Objektpunkt  $(x_1, x_2)$  bzw.  $(r, \phi)$  bzw.  $(s, t)$  passiert, schneidet die  $t$ -Achse an der Stelle  $t'$ . Für diesen Strahl gilt die Geradengleichung (Hessesche Normalform)<sup>3</sup>

$$t' - t = 0 \quad (3.1-2)$$

$$\text{mit } t' = \underline{x}^T \cdot \underline{e}_t \quad (3.1-3a)$$

$$= r \cos(\theta - \phi) \quad (3.1-3b)$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = |\underline{x}| \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (3.1-4)$$

$$r = |\underline{x}| \quad (3.1-5)$$

$$\underline{e}_t = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}: \text{Einheitsvektor der } t\text{-Achse.} \quad (3.1-6)$$

<sup>3</sup> Sind  $t'$  der senkrechte (minimale) Abstand einer Geraden  $s'$  vom Koordinatenursprung und  $\underline{e}_t = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$  der Normalenvektor von  $s'$ , so hat ein Punkt  $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  von der Geraden  $s'$  den senkrechten Abstand  $d = |\underline{x}^T \underline{e}_t - t| = |t' - t|$ . Im vorliegenden Fall liegt  $\underline{x}$  auf  $s'$  und dadurch ist  $d = 0$ .

$$\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta = \cos(\theta - \phi) \quad (3.1-7)$$

Mit Hilfe der in Projektionsrichtung zeigenden Impulsfunktion<sup>4</sup>  $\delta(\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{e}_t - t)$  wird (3.1-1) zur Radon-Transformation

$$P_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{e}_t - t) d^2 \mathbf{x}. \quad (3.1-8)$$

(3.1-8) beschreibt eine gerichtete Mittelung. Weil diese Mittelung nur in Projektionsrichtung erfolgt, werden alle Strukturanteile des Objektes herausgemittelt, die sich in Projektionsrichtung ausdehnen. Unverändert bleiben dagegen die senkrecht zur Projektionsrichtung weisenden Strukturanteile.

Radontransformierte können nur in Sonderfällen der Objektfunktion  $f(\mathbf{x})$  analytisch berechnet werden. Für punktförmige Objekte ist dies möglich. Punktobjekte haben auch insofern eine bevorzugte Bedeutung, als jedes beliebige Objekt als eine Gesamtheit einzelner Punkte aufgefaßt werden kann. Dadurch können die Radontransformierten ausgedehnter Objekte aus den Impulsantworten der Objektpunkte zusammengesetzt werden.

### 3.1.2 Radon-Transformation eines punktförmigen Objektes

Bei einem Punktobjekt mit dem Funktionswert  $f_0$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  bzw.  $(r_0, \phi_0)$  lautet die Objektfunktion

$$f(\mathbf{x}) = f_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3.1-9)$$

Nach (3.1-8) ergibt die Radontransformation

$$\begin{aligned} P_\theta(t) &= f_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{e}_t - t) d^2 \mathbf{x} \\ &= f_0 \delta(\mathbf{x}_0^T \cdot \mathbf{e}_t - t). \end{aligned} \quad (3.1-10)$$

Demnach ist eine Projektion einer  $\delta$ -Funktion ebenfalls eine  $\delta$ -Funktion; der Schatten des Impulses ist auch ein Impuls und dies für alle  $\theta$ . Gemäß (3.1-3b) ist

$$\mathbf{x}_0^T \cdot \mathbf{e}_t = r_0 \cos(\phi_0 - \theta) \quad (3.1-11)$$

und damit geht (3.1-10) über in

$$P_\theta(t) = f_0 \delta[r_0 \cos(\phi_0 - \theta) - t]. \quad (3.1-12)$$

---

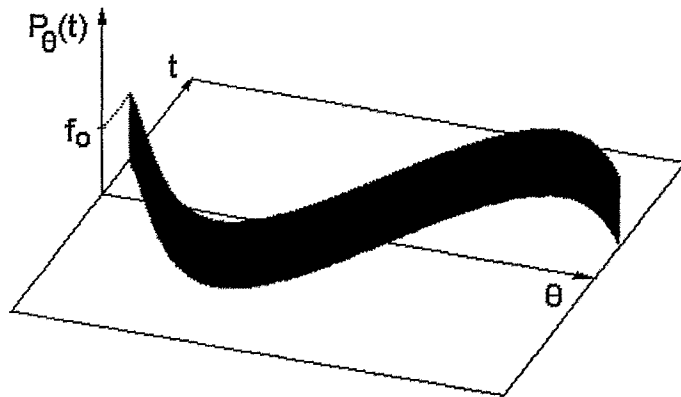
<sup>4</sup> Für  $\delta$ -Impulse gilt  $\delta(v) = \begin{cases} \infty & \text{für } v=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(v) dv = 1$

Das Argument der  $\delta$ -Funktion in (3.1-12) sagt aus, daß die Gesamtheit aller Projektionsfunktionen bzw. die über dem  $(\theta, t)$ -Koordinatensystem definierte zweidimensionale Projektionsfunktion

$$P(\theta, t) = \begin{cases} f_0 & \text{für } t = r_0 \cos(\phi_0 - \theta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1-13)$$

eine mit dem Wert  $f_0$  gewichtete Sinuskurve (daher die Bezeichnung Sinogramm) beschreibt, Bild 3-2.

**Bild 3-2** Sinogramm eines einzelnen Objektpunktes bzw. eines Impulses



Das Sinogramm eines beliebigen Objektes ist demnach die Überlagerung der Sinogramme aller einzelnen Objektpunkte.

Die Bezeichnung Sinogramm ist auch bei Zentralprojektionen gebräuchlich, wenngleich dort allenfalls Sinus-ähnliche Formationen vorkommen, vgl. Bild 2-5.

### 3.1.3 Inverse Radon-Transformation für ein punktförmiges Objekt

Die Rekonstruktion der Objektfunktion  $f(\underline{x})$  aus Projektionen  $P_\theta(t)$  basiert auf der inversen Radon-Transformation:

$$f(\underline{x}) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t) h(t' - t) dt d\theta \quad ^5 \quad (3.1-14)$$

mit  $t' = r \cos(\theta - \phi)$  nach (3.1-3b)

$h(t' - t)$ : Hilfsfunktion zur

- Filterung der Projektionsfunktion  $P_\theta(t)$ , wobei die Filtercharakteristik noch bestimmt werden muß, und zur
- Rückprojektion: Der Wert der Projektionsfunktion an der Stelle  $t'$  wird in rückwärtiger Projektionsrichtung sämtlichen Objektpunkten  $(r, \phi)$  auf der Projektionsgeraden  $t' - t = 0$  zugeordnet.

<sup>5</sup> Ein zusätzlicher Faktor  $\frac{1}{2\pi}$  ist hier weggelassen; er wird im weiteren nicht benötigt.

inneres Integral: Faltung

äußeres Integral: Überlagerung der Rückprojektionen aus allen Projektionsrichtungen

Da jede Objektfunktion  $f(\underline{x})$  in  $\delta$ -Impulse zerlegt werden kann, wird (3.1-14) nur für ein Punktobjekt betrachtet, nämlich nach (3.1-9) für  $f(\underline{x}) = \delta(\underline{x} - \underline{x}_0)$  mit  $\underline{x}_0 = \underline{0}$  (Impuls im Koordinatenursprung). Die Projektionsfunktion ist dann gemäß (3.1-10)

$P_\theta(t) = \delta(t)$ . Weil die Filtercharakteristik von  $h(t' - t)$  noch nicht bestimmt ist, wird zunächst nur ungefiltert rückprojiziert. Infolge des Verzichts auf die Filterung ergibt die Rückprojektion nicht den originalen Impuls, sondern - als "fehlende Filterung" - die Impulsantwort des inversen Filters. Die nachfolgende Inversion des inversen Filters soll die gesuchte Filtercharakteristik von  $h(t' - t)$  ergeben.

Für die ungefilterte Rückprojektion wird in (3.1-14) die Funktion  $h(t' - t)$  durch die in Projektionsrichtung zeigende Impulsfunktion  $\delta(t' - t)$  ersetzt. Mit ihr und unter Beachtung von (3.1-3) folgt aus (3.1-14) die Bildfunktion

$$\begin{aligned} B(\underline{x}) &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \delta(t) \delta(t' - t) dt d\theta \\ &= \int_0^\pi \delta(t') d\theta \\ &= \int_0^\pi \delta[r \cos(\theta - \phi)] d\theta = B(r, \phi). \end{aligned} \quad (3.1-15)$$

Daraus ergibt sich nach der Theorie der  $\delta$ -Distributionen<sup>6</sup>

$$B(r, \phi) = \int_0^\pi \frac{\delta(\theta - \phi - \frac{\pi}{2})}{r} d\theta = \frac{1}{r}. \quad (3.1-16)$$

Statt der originalen Impulsfunktion  $f(\underline{x}) = \delta(\underline{x})$  bzw.  $f(r) = \delta(r)$  entsteht also durch die ungefilterte Rückprojektion die Funktion  $\frac{1}{r}$  bzw.  $\frac{1}{|\underline{x}|}$ , Bild 3-4b. Diese Funktion ist die Impulsantwort des inversen Filters.

Für eine beliebige Objektfunktion  $f(\underline{x})$  ist die ungefilterte Rückprojektion durch die Faltung von  $f(\underline{x})$  mit der Impulsantwort  $\frac{1}{|\underline{x}|}$  bestimmt:

---

<sup>6</sup> Nach der Theorie der  $\delta$ -Distributionen gilt für eine Funktion  $q(v)$ , die nur eine einfache Nullstelle  $v_0$  besitzt und deren Ableitung dort  $\frac{dq(v_0)}{dv} = q'(v_0) \neq 0$  ist, die Beziehung

$$\delta[q(v)] = \frac{\delta(v - v_0)}{|q'(v_0)|}. \text{ Im vorliegenden Fall ist } q(v) = r \cos(\theta - \phi) \text{ für } r \neq 0. \text{ Folglich ist } v = \theta - \phi,$$

$$v_0 = \frac{\pi}{2}, \quad v - v_0 = \theta - \phi - \frac{\pi}{2} \text{ und } q'(v_0) = -r \sin(\frac{\pi}{2}) = -r.$$

$$\begin{aligned}
 B(\underline{x}) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(\underline{x}') \cdot \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^2 \underline{x}' \\
 &= f(\underline{x}) * \frac{1}{|\underline{x}|}
 \end{aligned}
 \tag{3.1-17}$$

Um aus (3.1-17) die originale Funktion  $f(\underline{x})$  zu gewinnen, muß auf der rechten Seite dieser Gleichung der Term  $\frac{1}{|\underline{x}|}$  eliminiert (entfaltet) werden. Dafür wird (3.1-17) formal durch die Inverse des inversen Filters, also die Hilfsfunktion  $h(\underline{x})$  erweitert:

$$\begin{aligned}
 h(\underline{x}) * B(\underline{x}) &= h(\underline{x}) * \left( f(\underline{x}) * \frac{1}{|\underline{x}|} \right) = \left( h(\underline{x}) * \frac{1}{|\underline{x}|} \right) * f(\underline{x}) \\
 &= \delta(\underline{x}) * f(\underline{x}) = f(\underline{x})
 \end{aligned}
 \tag{3.1-18}$$

Eine Funktion  $h(\underline{x})$ , welche die aus (3.1-18) ablesbare Gleichung

$$h(\underline{x}) * \frac{1}{|\underline{x}|} = \delta(\underline{x})
 \tag{3.1-19}$$

erfüllt, existiert nicht, denn  $\frac{1}{|\underline{x}|}$  ist für  $|\underline{x}| = 0$  nicht erklärt. Demnach kann  $f(\underline{x})$  grundsätzlich nicht exakt rekonstruiert werden. Für praktische Zwecke genügen jedoch hinreichend genaue Näherungen. Zur Bestimmung einer Näherung für  $h(\underline{x})$  wird (3.1-19) zweidimensional fouriertransformiert:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{II} \left\{ h(\underline{x}) * \frac{1}{|\underline{x}|} \right\} &= \mathcal{F}_{II} \{ \delta(\underline{x}) \} \\
 \mathcal{F}_{II} \{ h(\underline{x}) \} \cdot \mathcal{F}_{II} \left\{ \frac{1}{|\underline{x}|} \right\} &= \mathcal{F}_{II} \{ \delta(\underline{x}) \} \\
 \hat{h}(\underline{u}) \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\underline{x}|} e^{-j2\pi(\underline{u}_1 x_1 + \underline{u}_2 x_2)} dx_1 dx_2 &= 1
 \end{aligned}
 \tag{3.1-20}$$

mit  $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ : Ortsfrequenz mit Komponenten in der Orientierung von  $x_1, x_2$

Die Integration in (3.1-20) wird in den Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  vorgenommen. Mit  $u_1 = |\underline{u}| \cos \phi$ ,  $u_2 = |\underline{u}| \sin \phi$  und nach (3.1-4, 3.1-5) mit  $x_1 = r \cos \phi$ ,  $x_2 = r \sin \phi$ ,  $|\underline{x}| = r$  sowie mit

$$dx_1 dx_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial r} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \phi} & \frac{\partial x_2}{\partial \phi} \end{vmatrix} dr d\phi = r dr d\phi
 \tag{3.1-21}$$

ist in (3.1-20)



$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\underline{x}|} e^{-j2\pi(\underline{u}_1 x_1 + \underline{u}_2 x_2)} dx_1 dx_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} e^{-j2\pi|\underline{u}|r} r dr d\phi \\ &= \frac{1}{j|\underline{u}|}. \end{aligned} \quad (3.1-22)$$

Dies ist das Spektrum eines Integrierers<sup>7</sup>. Die Inverse des Integrierers ist ein (idealer) Differenzierer. Dieser ist, wie aus (3.1-20) und (3.1-22) hervorgeht, bestimmt durch die spektrale Funktion

$$\hat{h}(\underline{u}) = j|\underline{u}|. \quad (3.1-23)$$

Der ideale Differenzierer ist nicht realisierbar, denn  $|\underline{u}|$  ist nicht absolut integrierbar<sup>8</sup> und kann deshalb nicht invers fouriertransformiert werden. Eine realisierbare Näherung entsteht aber dadurch, daß die hochfrequenten Anteile von  $|\underline{u}|$  (also für  $|\underline{u}| \rightarrow \infty$ ) unterdrückt werden. Der ideale Differenzierer wird so zu einem realen Hochpaß. Folgende Näherungen werden vorgenommen:

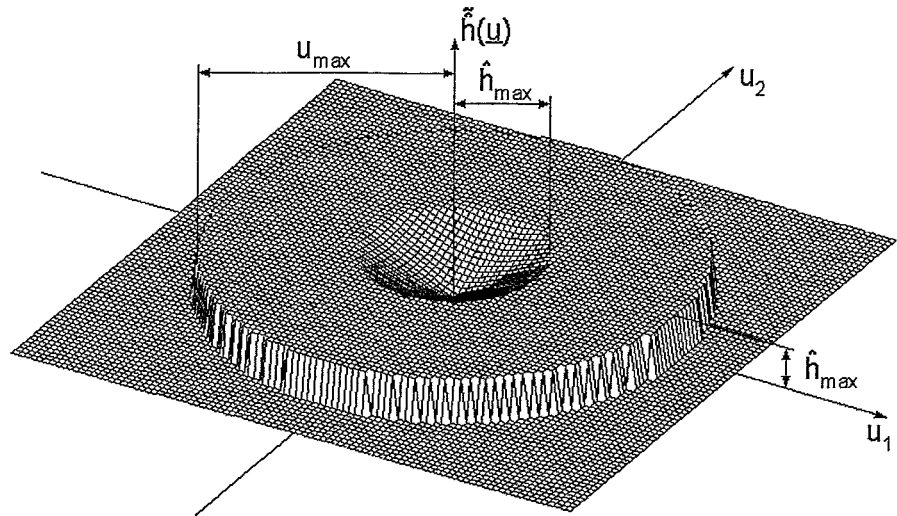
- $\hat{h}(\underline{u})$  wird oberhalb einer Grenzfrequenz  $u_{\max}$  identisch Null gesetzt.
- Die durch a) herbeigeführte Wellenerscheinung wird abgeschwächt, indem  $\hat{h}(\underline{u})$  zusätzlich im Wert begrenzt wird, nämlich auf  $\hat{h}_{\max} \leq u_{\max}$ .

Als Näherung von (3.1-23) entsteht damit die Filterfunktion, s. Bild 3-3,

$$\tilde{h}(\underline{u}) = \begin{cases} j|\underline{u}| & \text{für } |\underline{u}| \leq \hat{h}_{\max} \\ j\hat{h}_{\max} & \text{für } \hat{h}_{\max} < |\underline{u}| \leq u_{\max} \\ 0 & \text{für } u_{\max} < |\underline{u}|. \end{cases} \quad (3.1-24)$$

<sup>7</sup> Formal gesehen ist der Operator, welcher die originale Objektfunktion  $f(\underline{x})$  in die Bildfunktion  $B(\underline{x})$  überführt, ein zweidimensionaler Integrierer. Im eindimensionalen Fall ist dies leichter ersichtlich, denn die eindimensionale Integration eines  $\delta$ -Impuls ergibt den Wert 1. Im zweidimensionalen Fall ergibt sich ein äquivalentes Ergebnis: Die Impulsantwort  $\frac{1}{r}$  oder genauer  $\frac{1}{2\pi r}$  hat unter einem Kreisring, welcher den Radius  $r$  und deshalb die Länge  $2\pi r$  hat, die Fläche  $2\pi r \cdot \frac{1}{2\pi r} = 1$ .

<sup>8</sup>  $v(t)$  ist in  $t \in [-\infty, \infty]$  nur dann absolut integrierbar, wenn  $\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)| dt < \infty$  existiert (Dirichlet-Bedingung)



**Bild 3-3**  
Die spektrale  
Filterfunktion  $\tilde{h}$

Dieses sehr einfache Filter kommt dem in der Tomographie gebräuchlichen Shepp-Logan-Filter nahe. Vorteilhaft gegenüber anderen üblichen Filtern (z.B. Butterworth-, Hamming-, Parzen-Filter) ist daran, daß im rekonstruierten Objektbild eine vergleichsweise hohe Auflösung erreicht wird. Allerdings kann die unetige Bandbegrenzung zu unerwünschten Wellenerscheinungen im rekonstruierten Objektbild führen (Gibbs'sches Phänomen).

Aufgrund der Bandbegrenzung ist es nach dem Abtasttheorem unmöglich, beliebig kleine Elemente des Objektbildes zu rekonstruieren. Praktisch ist dieser Nachteil vertretbar, denn reale Sinogramme sind diskontinuierlich (Abschnitt 4) und erlauben daher ohnehin nur die Rekonstruktion von Objektbestandteilen ab einer Mindestgröße.

Wegen  $\tilde{h}(\underline{u}) = 0$  für  $\underline{u} = \underline{0}$  hat die gefiltert rekonstruierte Objektfunktion im Gegensatz zur Originalfunktion keinen Gleichanteil. Die rekonstruierte Funktion ist deshalb im Mittel gleich Null. Dies ist für die vorgesehene Anwendung bedeutungslos, denn wie noch gezeigt wird (Abschnitt 4.3), sind dort nur relative Änderungen von Belang.

Die Faltung  $h(\underline{x}) * B(\underline{x})$  in (3.1-18) wird im Frequenzbereich unter Beachtung der Näherung (3.1-24) zu dem Produkt aus  $\tilde{h}(\underline{u})$  und dem Spektrum der Bildfunktion  $B(\underline{x})$ . Dieses spektrale Produkt ist absolut integrierbar und kann deshalb invers fouriertransformiert werden. Somit entsteht die gefilterte Rückprojizierte der originalen Objektfunktion  $\tilde{f}(\underline{x})$  als Näherung

$$\tilde{f}(\underline{x}) = \mathcal{F}_{II}^{-1} \left\{ \tilde{h} \cdot \mathcal{F}_{II} \{ B(\underline{x}) \} \right\} . \quad (3.1-25)$$

Dem Aufbau der Formel (3.1-25) entsprechend kann die praktische Berechnung von  $\tilde{f}(\underline{x})$  in folgenden Schritten ausgeführt werden:

- Schritt 1: Aus den gemessenen eindimensionalen Projektionsfunktionen  $P_{\theta}(t)$  bzw. aus der zweidimensionalen Projektionsfunktion  $P(\theta, t)$  wird durch ungefilterte Rückprojektion die Bildfunktion  $B(\underline{x})$  erzeugt.

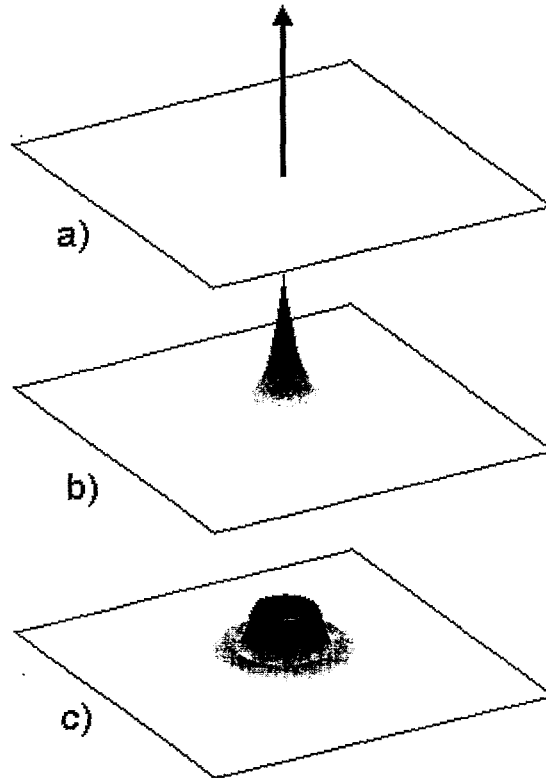
Schritt 2: Die Fouriertransformierte der Bildfunktion  $B(x)$  aus Schritt 1 und die Filterfunktion  $\tilde{h}(u)$  nach (3.1-24) werden im Frequenzbereich miteinander multipliziert.

Schritt 3: Das spektrale Produkt aus Schritt 2 wird invers fouriertransformiert.

Die Operationen Rückprojektion und Filterung sind linear und dürfen deshalb vertauscht werden. Erfolgt erst die Filterung, d.h. werden die einzelnen Projektionen  $P_\theta(t)$  vor ihrer Rückprojektion erst gefiltert, so genügt dafür die eindimensionale Fouriertransformation.

Statt über den Frequenzbereich kann die Filterung auch direkt im Originalbereich vorgenommen werden, nämlich durch die Faltung der  $P_\theta(t)$  mit der Impulsantwort des Filters. Dies wird hier nicht weiter erörtert.

Die Wirkung der Filterung auf die rekonstruierte Objektfunktion eines einzelnen Impulses verdeutlicht das Bild 3-4c.



**Bild 3-4** Zur gefilterten Rückprojektion einer Impulsfunktion

- a) ein  $\delta$ -Impuls als originale Objektfunktion  $f(x)$
- b) aus dem Sinogramm des Impulses (vgl. Bild 3-2) ungefiltert rückprojizierte Bildfunktion  $B(x) = \frac{1}{r} = \frac{1}{|x|}$  gemäß (3.1-16)
- c) gefilterte Rückprojektion  $\tilde{f}(x)$  gemäß (3.1-25); oben abgeschnitten und gegenüber b) vergrößert

Die gefilterte Funktion  $\tilde{f}(x)$  in Bild 3-4c ist dem originalen Impuls im Bildteil a weitaus ähnlicher als die ungefilterte Bildfunktion  $B(x)$  im Bildteil b, obgleich dies wegen der beträchtlichen Bildvergrößerung nicht gut deutlich wird. Die Vergrößerung läßt konzentrische Wellen erkennen. Sie stammen von der Unstetigkeit der Bandbegrenzung in (3.1-24) und sind eine Erscheinungsform des Gibbs'schen Phänomens. Auf dem Zentralberg der Impulsantwort  $\tilde{f}(x)$  (im Bild abgeschnitten) befindet sich das globale Maximum der Funktion. Das nächstliegende Wellental enthält bereits das globale

Minimum der Funktion<sup>9</sup>. Diese Erscheinung wird sich später bei der Bildrekonstruktion wiederfinden.

### 3.2 Die Gefilterte Rückprojektion bei der Zentralprojektion

Das Prinzip der gefilterten Rückprojektion wurde oben anhand der Parallelprojektion eingeführt und wird nun für die Zentralprojektionen modifiziert. Dazu wird in die Parallelprojektion einfach nur die Geometrie der divergierenden Projektionsstrahlen einbezogen.

Ein Projektionsstrahl, der im Winkel  $\gamma$  von der Quelle S ausgeht, wird zunächst als Bestandteil einer Parallelprojektion aufgefaßt, Bild 3-5.

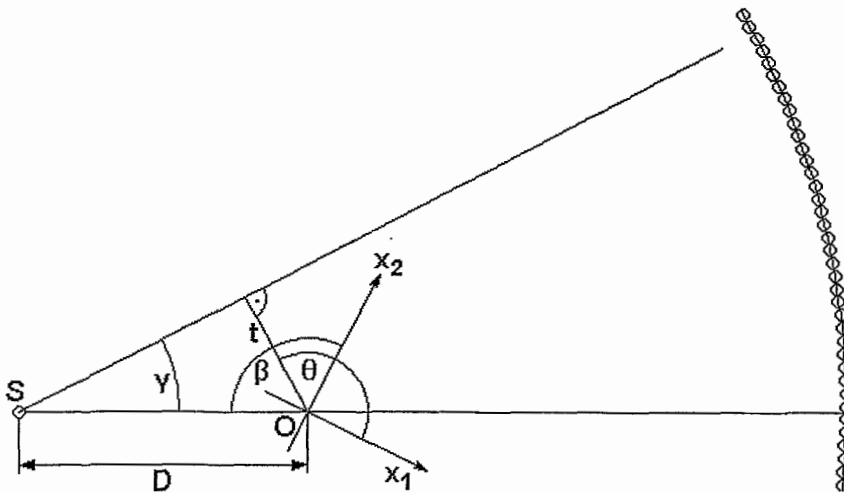


Bild 3-5 Schema der Zentralprojektion

Für die Rekonstruktion bei Parallelprojektionen gilt nach (3.1-14)

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(t) h(t' - t) dt d\theta \quad (3.2-1)$$

Nach Bild 3-5 ist nun

<sup>9</sup> Diese Erscheinung wird bereits durch das nur eindimensionale und lediglich bandbegrenzte Spektrum  $\tilde{h}(u) = \begin{cases} |u| & \text{für } |u| \leq u_{\max} \\ 0 & \text{für } |u| > u_{\max} \end{cases}$  verständlich. Dessen inverse Fourier-Transformierte ist

$$\tilde{h}(t) = \mathcal{F}_1^{-1}\{\tilde{h}(u)\} = 2u_{\max}^2 \frac{\sin(2\pi u_{\max} t)}{2\pi u_{\max} t} - u_{\max}^2 \left( \frac{\sin(\pi u_{\max} t)}{\pi u_{\max} t} \right)^2. \text{ Die in } \tilde{h}(t) \text{ enthaltenen Terme der Form}$$

$\frac{\sin t}{t}$  (Spaltfunktion) sind der im Bild 3-4c beobachteten, dort aber viel geringeren Wellenerscheinung analog. Die Funktion  $\tilde{h}(t)$  hat für  $t = 0$  ihr globales Maximum. Von dort aus sinkt der Funktionswert beidseitig monoton auf sein globales Minimum bei etwa  $t = \pm 0.65 \cdot u_{\max}$ . Mit zunehmendem  $|t|$  nähert sich  $\tilde{h}(t)$  oszillierend dem Wert Null.

$$\theta = \beta + \gamma, \quad t = D \sin \gamma. \quad (3.2-2)$$

Ein Objektpunkt  $(x_1, x_2)$  bzw.  $(r, \phi)$ , der sich im Winkel  $\gamma'$  zur Winkelhalbierenden des Fächers und im Abstand  $L$  von der Quelle  $S$  befindet, wird im Rahmen der Parallelprojektion an die Stelle  $(t', \theta)$  abgebildet, Bild 3-6. Es läßt sich zeigen, daß

$$L \sin \gamma' = r \cos(\beta - \phi), \quad L \cos \gamma' = r \sin(\beta - \phi) + D \quad (3.2-3)$$

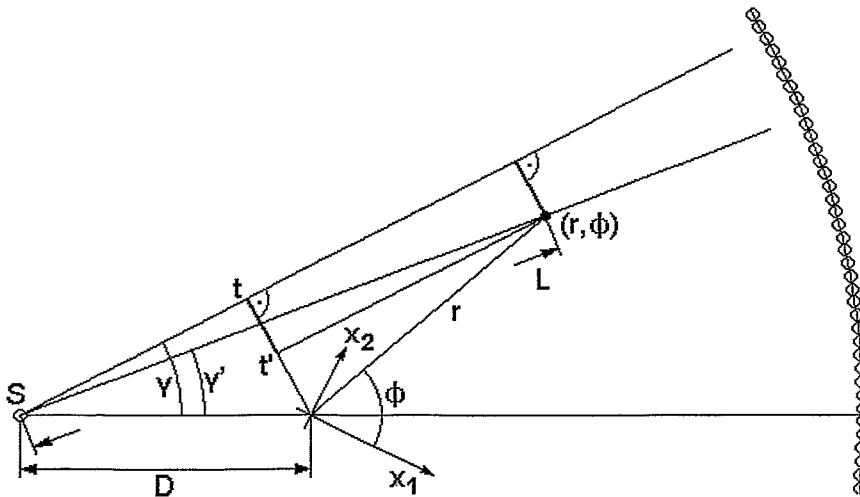
ist und somit

$$L(r, \phi, \beta) = \sqrt{[D + r \sin(\beta - \phi)]^2 + [r \cos(\beta - \phi)]^2}. \quad (3.2-4)$$

Demnach ist  $L$  unabhängig von  $\gamma$ . Mit (3.1-3b) und (3.2-2) ist

$$\begin{aligned} t' - t &= r \cos(\theta - \phi) - t \\ &= r \cos(\beta + \gamma - \phi) - D \sin \gamma \\ &= r \cos(\beta - \phi) \cos \gamma - [r \sin(\beta - \phi) + D] \sin \gamma \\ &= L(\sin \gamma' \cos \gamma - \cos \gamma' \sin \gamma) \\ &= L \sin(\gamma' - \gamma). \end{aligned} \quad (3.2-5)$$

Der Faktor  $L$  in (3.2-5) bedeutet folgendes, vgl. Bild 3-6: Der Objektpunkt  $(r, \phi)$  hat im Fächer die Koordinaten  $(L, \gamma')$ . In der Parallelprojektion hat dieser Punkt vom Projektionsstrahl den senkrechten Abstand  $t' - t$ . Es ist plausibel, daß bei einer konstanten Winkeldifferenz  $\gamma' - \gamma$  der Abstand  $t' - t$  proportional der Länge  $L$  ist.



**Bild 3-6** Zur Veranschaulichung von (3.2-5)

Mit (3.2-2) wird aus der für Parallelstrahlen gültigen Projektionsfunktion  $P_\theta(t)$  die Projektionsfunktion für Fächerstrahlen

$$P_{\beta+\gamma}(D \sin \gamma) = R_\beta(\gamma). \quad (3.2-6)$$

Mit (3.2-5, 3.2-6) und

$$dt d\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial \gamma} & \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial t}{\partial \beta} & \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \end{vmatrix} d\gamma d\beta = \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (3.2-7)$$

geht (3.2-1) über in

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta}(\gamma) h[L \sin(\gamma' - \gamma)] D \cos \gamma d\gamma d\beta \quad (3.2-8)$$

Um die zur Zentralprojektion gehörende Funktion  $h[L \sin(\gamma' - \gamma)]$  in den Termen der zur Parallelprojektion gehörenden Funktion  $h(t' - t)$  darzustellen, wird  $h(t)$  gemäß (3.1-23)  $\hat{h}(u) = |u|$  als inverse Fouriertransformierte von  $|u|$  aufgefaßt:

$$h(t' - t) = \int_{-u_{\max}}^{u_{\max}} |u| e^{j2\pi u(t' - t)} du \quad (3.2-9)$$

Mit (3.2-5) ist

$$h[L \sin(\gamma' - \gamma)] = \int_{-u_{\max}}^{u_{\max}} |u| e^{j2\pi u L \sin(\gamma' - \gamma)} du \quad (3.2-10)$$

Anhand der Transformation

$$\frac{u L \sin(\gamma' - \gamma)}{\gamma' - \gamma} = u' \quad (3.2-11)$$

folgt aus (3.2-10)

$$\begin{aligned} h[L \sin(\gamma' - \gamma)] &= \left( \frac{\gamma' - \gamma}{L \sin(\gamma' - \gamma)} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |u'| e^{j2\pi u'(\gamma' - \gamma)} du' \\ &= \left( \frac{\gamma' - \gamma}{L \sin(\gamma' - \gamma)} \right)^2 h(\gamma' - \gamma). \end{aligned} \quad (3.2-12)$$

Mit (3.2-12) wird schließlich (3.2-8) umgeformt in

$$f(r, \phi) = \int_0^{2\pi} \frac{D}{L^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\beta}(\gamma) \left( \frac{\gamma' - \gamma}{\sin(\gamma' - \gamma)} \right)^2 h(\gamma' - \gamma) \cos \gamma d\gamma d\beta, \quad (3.2-13)$$

wobei der  $\gamma$ -unabhängige Term  $L$  vor das innere Integral gezogen ist. Dem Aufbau der Formel (3.2-13) entsprechend können zu ihrer praktischen Berechnung die folgenden Schritte ausgeführt werden:

Schritt 1: Faltung der modifizierten Projektions- und Filterfunktion: <sup>10</sup>

$$[R_{\beta}(\gamma) \cos \gamma] * \left[ \left( \frac{\gamma}{\sin \gamma} \right)^2 h(\gamma) \right] \quad (3.2-14)$$

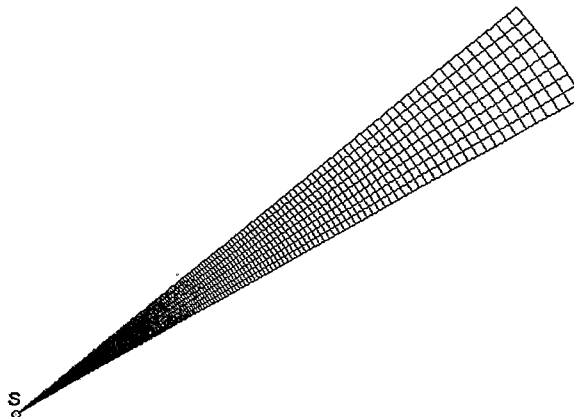
Schritt 2: Rückprojektion der gefilterten Projektionsfunktion, wobei mit  $\frac{D}{L^2}$  eine vom Abstand zur Quelle S abhängige Wichtung vorgenommen wird.

Der Term  $\frac{D}{L^2}$  in (3.2-13) bedeutet anschaulich folgendes: Die Parallel- und die Zentralprojektion gehen von unterschiedlichen Entfernungen zwischen der Quelle S und dem Ursprung O aus. Während der Abstand  $\overline{SO}$  bei der Parallelprojektion als unendlich gilt, ist er bei der Zentralprojektion nur endlich. Nun wird aber die Zentralprojektion aus der Sicht der Parallelprojektion betrachtet. Dazu müssen beide Entfernungen miteinander in Einklang gebracht werden, denn die Quelle ist in beiden Fällen dieselbe. Dies geschieht mit Hilfe eines Maßstabes, welcher

- der endlich weit entfernten Quelle eine unendliche Entfernung zuordnet,
- alle differentiellen Längen bei Annäherung an S proportional der Entfernung L verkürzt und
- alle differentiellen Flächen entsprechend mit dem Faktor  $L^2$  verkleinert, vgl. Bild 3-7. Im Fächersystem hat demnach eine differentielle Fläche bei Halbierung seiner Entfernung von S nur noch ein Viertel seiner Größe.

**Bild 3-7**

Zur Bedeutung von  $\frac{D}{L^2}$   
in (3.2-13)



Werden nun die Größen der differentiellen Flächen als Funktionswerte über der Fächerebene aufgefaßt, so ist die zugehörige Funktion proportional  $L^2$ ; sie bildet entlang der Projektionsstrahlen Parabeln und insgesamt ist diese Funktion ein Rotations-Paraboloid um S. Wird diese Funktion so wie (3.2-13) mit  $\frac{D}{L^2}$  gewichtet,

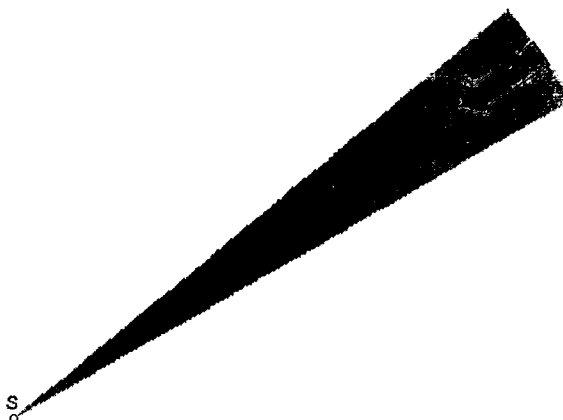
---

<sup>10</sup> In der vorgesehenen Anwendung variiert der Fächerwinkel nur etwa im Intervall  $\gamma \in [-30^\circ, 30^\circ]$ . Dann kann näherungsweise  $\cos(\gamma) \approx 1$  und  $\frac{\gamma}{\sin(\gamma)} \approx 1$  gesetzt und somit der Schritt 1 ohne nennenswerte Einbuße an der Qualität des rekonstruierten Bildes weggelassen werden.

verbleibt dagegen nur eine Konstante. Somit bleibt bei der Zentralprojektion (ebenso wie bei der Parallelprojektion) jeder rückprojizierte Funktionswert entlang seines Projektionsstrahls unverändert, vgl. Bild 3-8.

**Bild 3-8** Zur Rückprojektion bei Fächergeometrie:

Bei einer Projektionsfunktion, die über ein Winkelintervall konstant ist (konstanter Grauwert), wird dieser Wert unabhängig vom Abstand zur Quelle  $S$  sämtlichen Punkten des zugehörigen Kreissektors zugeordnet.



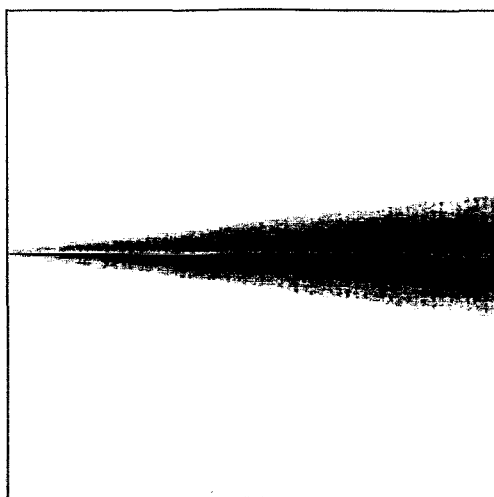
## 4. Simulationen

### 4.1 Rückprojektion und Filterung

Bezogen auf die feststehende Meßanordnung (Quelle und Detektorbogen) wird das Objekt, Bild 2-2a, diskontinuierlich in Winkelschritten  $\beta = 1, 2, \dots, 360^\circ$  gedreht. In Zentralprojektion entstehen am Detektorbogen die Projektionsfunktionen  $R_\beta(\gamma)$ . Sie werden zur zweidimensionalen Projektionsfunktion  $R(\beta, \gamma)$  zusammengefaßt. Diese Funktion wurde für den  $\gamma$ -kontinuierlichen Fall im Bild 2-5 als Sinogramm dargestellt. Aus dieser Funktion wird nun gemäß Formel (3.2-13) das Objektbild rekonstruiert.

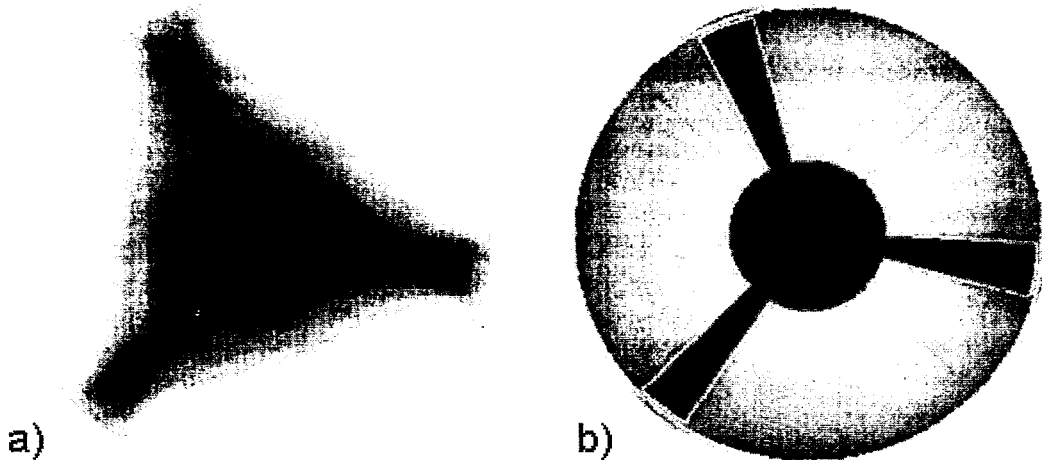
Die Rückprojektion nur einer einzigen, zu einem bestimmten Winkel  $\beta$  gehörenden (eindimensionalen) Projektionsfunktion  $R_\beta(\gamma)$  zeigt das Bild 4-1. Dieses Bild verdeutlicht, wie die Funktionswerte vom Detektorbogen her zur Strahlungsquelle hin aufgetragen (verschmiert) werden, vgl. Bild 3-8.

**Bild 4-1** Eine einzelne Rückprojektion (von rechts nach links)





Alle 360 einzelnen Rückprojektionen werden unter ihrem jeweiligen Drehwinkel  $\beta$  überlagert. Nach einem vollständigen  $\beta$ -Umlauf liegt die ungefilterte Rückprojektion des Objektbildes vor, Bild 4-2a <sup>11</sup>. Das Ergebnis der gefilterten Rückprojektion, wobei die Filterung gemäß (3.1-24) und (3.2-14) vorgenommen wurde, ist im Bild 4-2b dargestellt.



**Bild 4-2** Die aus dem  $\gamma$ -kontinuierlichen Sinogramm (Bild 2-5) erzeugte a) ungefilterte und b) gefilterte Rückprojektion.

Die Funktion im Bild 4-2a entspricht dem zweidimensionalen Integral über die originale Objektfunktion, s. Abschnitt 3.1.3, Fußnote 7. Demnach ist jeder Punkt der Objektfunktion mit der Funktion  $\frac{1}{r}$  gefaltet. Da einerseits  $\frac{1}{r}$  mit zunehmendem  $r$  monoton abnimmt und andererseits das Objekt eine abgegrenzte Anhäufung von Punkten darstellt, hat das Faltungsergebnis eine gewisse Ähnlichkeit mit der Funktion  $\frac{1}{r}$ . Von lokalen Einzelheiten abgesehen nimmt nämlich die ungefiltert rückprojizierte Objektfunktion von innen nach außen ab, im Bild 4-2a von schwarz nach weiß.

Die gefilterte Rückprojektion im Bild 4-2b kommt dem originalen Objekt sehr nahe, vgl. Bild 2-2a. Dennoch gibt es einen charakteristischen, wie folgt begründeten Fehler: Da statt einer Differentiation nur eine Hochpaßfilterung vorgenommen wurde und diese zudem mit scharfer Bandbegrenzung, vgl. Bild 3-3, ist das Gibbs'sche Phänomen vorhanden. Dieses zeigt sich insbesondere an dem schmalen hellen Saum, der die schwarzen Flächen des Laufrades umgibt. Der Saum ist Teil einer ausgedehnteren Wellenerscheinung, vgl. Bild 3-4c, wobei die entfernteren Wellenbestandteile wegen der ziemlich geraden Kanten des Laufrades durch Interferenz fast vollständig ausgelöscht sind.

<sup>11</sup> Der Randbereich des Rekonstruktionsbildes einschließlich des kreisringförmige Pumpengehäuses sind dabei ausgeblendet, weil dies in der gegebenen Problemstellung ohnehin keine Bedeutung hat.

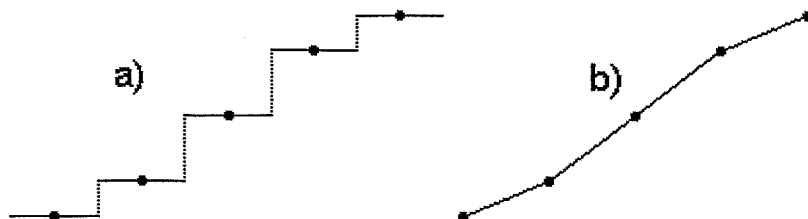
## 4.2 Interpolationen

Der bisher als kontinuierlich angenommene Fächerwinkel  $\gamma$  ist unter Berücksichtigung der diskreten Detektorpositionen diskontinuierlich; aus jeder  $\gamma$ -kontinuierlichen Projektionsfunktion  $R_\beta(\gamma)$  werden  $n=64$  äquidistante Funktionswerte ausgeblendet bzw. abgetastet. Daraufhin sind Funktionswerte der Projektionsfunktion  $R(\beta, \gamma)$  nur noch über einem zweidimensionalen Raster von  $360 \cdot 64$ , also endlich vielen Stützstellen der  $(\beta, \gamma)$ -Ebene gegeben. Endlich viele Stützwerte reichen aber nicht aus, um ein zweidimensionales Objektbild zu rekonstruieren. Weil nämlich jeder Stützwert nur entlang einer Linie (Projektionsstrahl, vgl. Abschnitt 3.1.3) rückprojiziert wird, ergäbe die Rückprojektion der Punktmenge insgesamt nur endlich viele Linien, aber keine Fläche. Um ein flächenhaftes Objektbild entstehen zu lassen, muß wenigstens einer der beiden Parameter von  $R(\beta, \gamma)$  in eine kontinuierliche Form gebracht (interpoliert) werden. Für die Interpolation ist der Fächerwinkel  $\gamma$  besonders geeignet. Betrachtet werden je eine Stufen-, Geraden- und Spline-Interpolation.

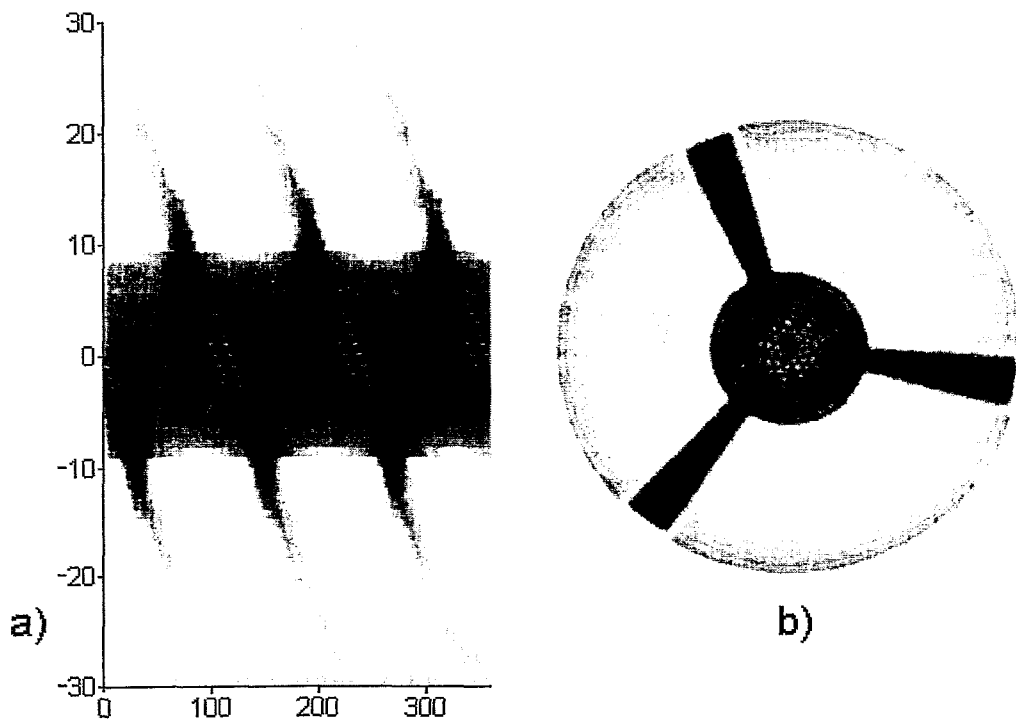
Aus einer abgetasteten Wertefolge läßt sich die ursächlich kontinuierliche Funktion nur dann eindeutig wiederherstellen, wenn diese Funktion keine Frequenzen oberhalb der Nyquist-Frequenz (halbe reziproke Abtastperiode, s. Abtasttheorem) enthält. Im vorliegenden Fall enthält aber das  $\gamma$ -kontinuierliche Sinogramm (Bild 2-5) in  $\gamma$ -Richtung auch erheblich höhere Frequenzen. Ihre Information ist durch die Abtastung unwiederbringlich verloren. Gewisse abtastbedingte Qualitätseinbußen sind deshalb beim rekonstruierten Objektbild nicht zu vermeiden.

An den abgetasteten Projektionsfunktionen wird in  $\gamma$ -Richtung zuerst eine Rechteck- bzw. Stufen-Interpolation vorgenommen. Dazu wird jeder Abtastwert nach beiden Seiten über die jeweils halbe Abtastweite festgehalten, so daß insgesamt eine stufenförmige Funktion entsteht, Bild 4-3a.

**Bild 4-3**  
Zum Prinzip der  
a) Stufen- und  
b) Geraden-Interpolation



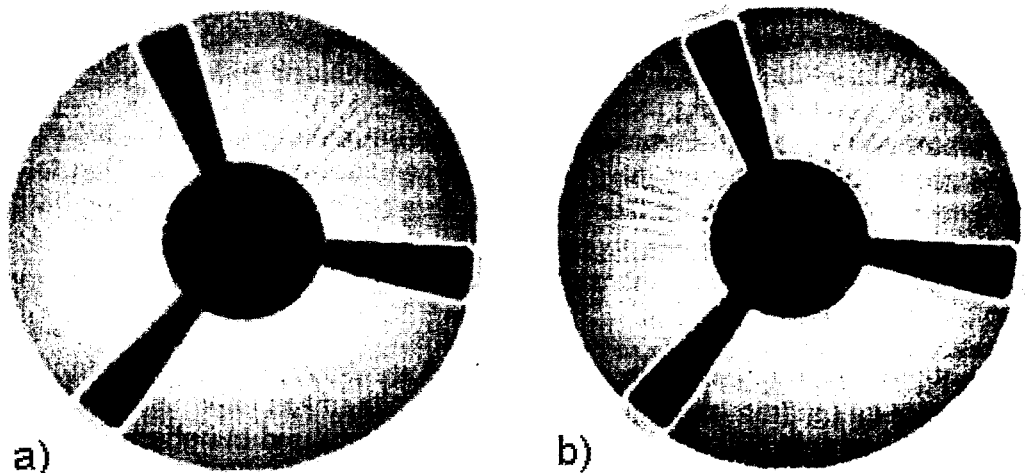
Zur Stufen-Interpolation gehört das im Bild 4-4a gezeigte Sinogramm; es unterscheidet sich markant von Bild 2-5. Durch die gefilterte Rückprojektion entsteht die im Bild 4-4b dargestellte Objektnachbildung.



**Bild 4-4** a) Sinogramm der in  $\gamma$ -Richtung abgetasteten und durch Stufen interpolierten zweidimensionalen Projektionsfunktion  $R(\beta, \gamma)$ , ( $t: \gamma, -: \beta$ , in Grad) und b) das daraus rekonstruierte Objektbild

Infolge der recht groben Stufen-Interpolation ist das rekonstruierte Objektbild im Bild 4-4b gegenüber der Darstellung im Bild 4-2b erheblich gestört. Die Bildfehler sind offensichtlich feinkörnig. Sie betreffen deshalb vor allem die hohen (Orts-)Frequenzen des Bildes. Ursache dafür ist die langsame Konvergenz der Fourierreihe der Sprungfunktion. Also sollten besser stetige Interpolationen verwendet werden.

Die einfachste stetige Interpolation ist die Geraden-Interpolation, Bild 4-3b. Noch erheblich glatter, weil nämlich auch in der ersten Ableitung stetig, ist die kubische Spline-Interpolation, s. Anhang 1. Die zu diesen beiden Interpolationen gehörenden Sinogramme sind von dem  $\gamma$ -kontinuierlichen Sinogramm im Bild 2-5 nicht auffällig verschieden. Auf ihre Darstellung wird deshalb verzichtet. Die Ergebnisse der gefilterten Rückprojektion für die beiden stetigen Interpolationen zeigt das Bild 4-5.



**Bild 4-5** Rekonstruierte Objektbilder bei a) Geraden- und b) Spline-Interpolation

Diese Ergebnisse sind deutlich besser als des Ergebnis der Stufen-Interpolation im Bild 4-4b. Das zur Spline-Interpolation gehörende Bild 4-2b ist sogar kaum noch vom ungestörten Bild 4-2b zu unterscheiden. Die Spline-Interpolation wird bei allen nachfolgenden Untersuchungen eingesetzt.

### 4.3 Bestimmung der Gasverteilung

Das tomographische Bildrekonstruktion wird nun zur Bestimmung der Gasverteilung in dem von der Pumpe transportierten Zweiphasenmedium herangezogen. Gesucht wird der Volumenanteil des Gases je Volumeneinheit des Mediums. Da dieser Quotient dimensionslos ist, werden die Volumina durch die rekonstruierten Werte der Absorptions- bzw. Objektfunktion ersetzt; ein linearer Zusammenhang (Meßskale) wird vorausgesetzt. Die Absorption im Gas ist vernachlässigbar klein und wird deshalb zu Null angenommen. Die Flüssigkeit besitzt einen relativ schwachen aber doch nutzbaren Zusammenhang zwischen Volumenanteil und Absorption. In der Flüssigkeit ist die Absorption nur etwa  $1/7$  gegenüber dem Material der Pumpe.

Die genannte Meßskale muß am realen Objekt konkretisiert werden. Dies erfordert zwei bekannte Bezugspunkte (Zweipunktform der Geradengleichung). Dafür eignen sich die beiden Extreme

- (1) nur Gas und
- (2) nur Flüssigkeit

in der Pumpe. Da ein Gasgehalt (kein Flüssigkeitsgehalt) bestimmt werden soll, dient der Fall (2) als Referenz bzw. als Nullpunkt der Meßskale. Schließlich gibt es noch den Fall

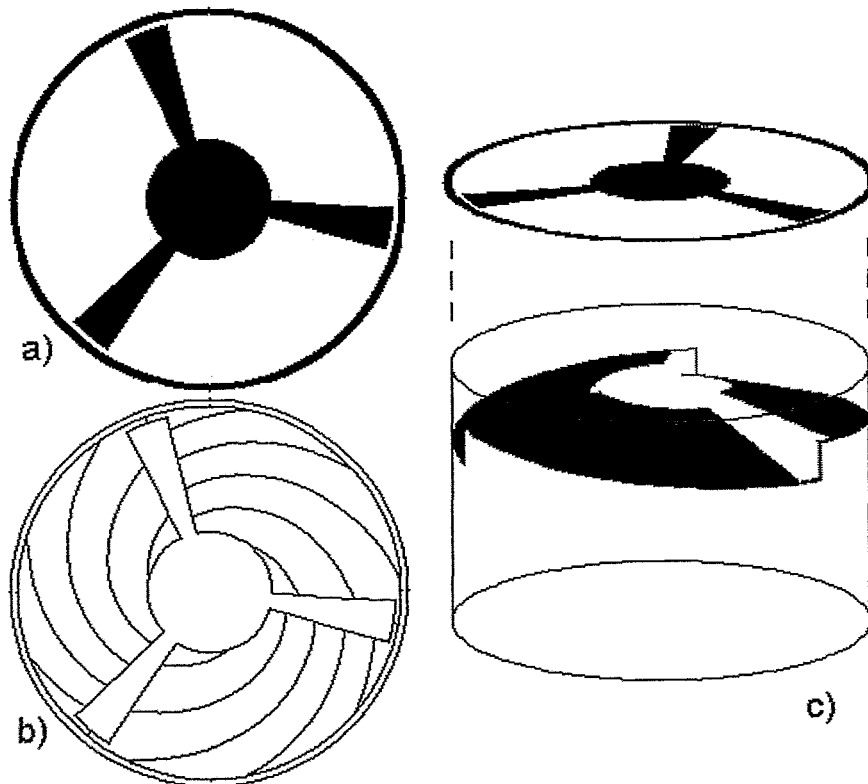
- (3) unbekanntes Flüssigkeits-Gas-Gemisch

in der Pumpe. Von der Objektfunktion zu Fall (3) wird nun um die Objektfunktion zu Fall (2) subtrahiert. Die Differenzfunktion wird dann mit der Differenz zwischen (2)

und (1) normiert.

Zur Veranschaulichung wird folgende Gasverteilung angenommen: Der Volumenanteil des Gases nimmt in Drehrichtung des Laufrades und mit wachsendem Abstand von der Drehachse jeweils monoton zu, insgesamt von 5% bis 30%. Die vom Gas verursachte Variation der Strahlungsabsorption beträgt damit  $(30\% - 5\%) = 25\% = 1/4$  gegenüber der Absorption im rein flüssigen Medium. Mit dem Absorptionsverhältnis  $1/7$  zwischen der Flüssigkeit und dem Material des Laufrades beträgt die gasbedingte Absorptionsänderung im Zweiphasenmedium nur etwa  $\frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{28}$

der Absorption im Laufrad. Die nunmehr vorliegende Objektfunktion ist im Bild 4-6 a, b, c in verschiedenen Ansichten dargestellt; sie entspricht Fall (3). Die Grauwertdarstellung im Bildteil a) läßt zum einen erkennen, daß die Absorption im Medium weit aus geringer als im Laufrad ist. Zum anderen ist die (eigentlich interessierende) Variation des Gasanteils fast nicht sichtbar. Die Bildteile b) und c) heben die gasbedingte Variation der Absorption deutlicher hervor. Die Höhe des Zylinders, der im Bildteil c) mit durchgezogenen Linien angedeutet ist, entspricht der Absorption im rein flüssigen Medium. Die Absorption im Laufrad entspricht der 7-fachen Höhe dieses Zylinders. Wegen der starken Dominanz des Laufrades wird die praktische Bestimmung des relativen Gasgehaltes voraussichtlich gewisse meßtechnische Probleme bereiten, insbesondere weil mit stochastischen Meßstörungen gerechnet werden muß.



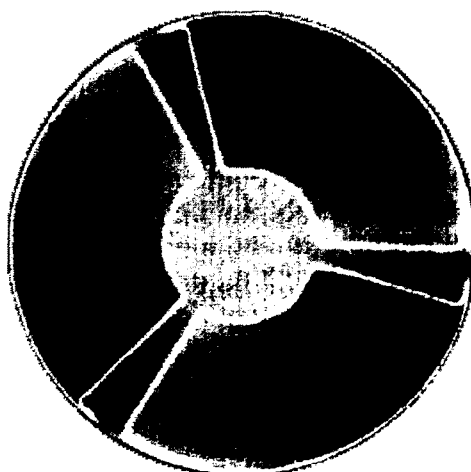
**Bild 4-6** Objektfunktion, bei der im Unterschied zu den bisherigen Objekten ein zweiphasiges Medium in der Pumpe enthalten ist. Das Absorptionsprofil des Medium wird, da es im Graustufenbild a) nicht gut zu erkennen ist, in b) durch Höhenlinien und in c) durch eine perspektivische Darstellung deutlicher hervorgehoben.

Die Differenz zwischen Bild 4-6a und dem (nicht dargestellten) Referenzfall (2) ist im Bild 4-7 gezeigt. Das vorgegebene Profil der Gasverteilung tritt dort deutlich hervor. Das Bild ist in Negativdarstellung angegeben, weswegen zunehmende Helligkeit abnehmenden Gasanteil andeutet.

In den betrachteten Objektfunktionen ist das Gebiet des Laufrades invariant gegenüber dem Medium. Die Differenz zweier Objektfunktionen liefert daher in diesem Gebiet formal den Wert Null, der seinerseits dem Referenzfall (2) zugeordnet ist. Folglich entspricht im Bild 4-7 der Grauwert im zentralen Teil der Laufradachse dem Gasgehalt Null; im Randbereich der Achse und mehr noch in den Laufradflügeln sind die Werte durch die Hochpaßfilterung verfälscht. Die zum Pumpenraum gehörenden Grauwerte sind durchweg dunkler als der Bezugswert in der Achsenmitte. Dies bestätigt qualitativ, daß im Pumpenraum überall ein Gasanteil vorhanden ist. Auf die Normierung und somit die quantitative Bestimmung des Gasanteils wird hier verzichtet.

**Bild 4-7** Das rekonstruierte Differenzbild mit dem gut sichtbaren Profil der Gasverteilung

Die zur Bildung des Differenzbildes erforderliche Subtraktion braucht nicht erst mit den rekonstruierten Objektfunktionen vorgenommen zu werden. Sie kann, da die Rekonstruktion nur lineare Operationen enthält, bereits an den betreffenden Projektionsfunktionen oder Sinogrammen erfolgen. Statt zweier getrennter Rekonstruktionen ist dann nur eine gemeinsame erforderlich.



#### 4.4 Stochastische Meßstörungen

Wie im Abschnitt 2.3 ausgeführt wurde, beruht die Bestimmung der Projektionsfunktionen  $R_{\beta}(\gamma)$  auf der Zählung von Impulsen und nach (2.3-3) auf der Operation  $\ln \frac{N_0}{N}$ ,

wobei  $N$  die Impulsanzahl pro Meßzeit (Zählrate) für den jeweiligen Detektor (Fächerwinkel  $\gamma$ ) und die jeweilige Projektionsrichtung (Drehwinkel  $\beta$ ) ist.

Da die Impulse durch radioaktiven Zerfall verursacht werden, erscheinen sie zufällig und unabhängig voneinander. Somit sind  $N$  eine Zufallsvariable und  $N(t)$  ein rein stochastischer Zufallsprozeß (ohne Gedächtnis). Da eine konstante Drehzahl des Pumpenlaufrades vorausgesetzt werden kann, unterliegt die Zählrate  $N$  einer Poisson-Verteilung, Anhang 2, und ist der Zufallsprozeß  $N(t)$  stationär.

Weil  $N(t)$  rein stochastisch und stationär ist, braucht die Meßzeit nicht in sich zusammenhängen, sondern dürfen mehrere auseinanderliegende Zeitabschnitte wie ein einziges zusammenhängendes Zeitintervall behandelt werden. Folglich ist es erlaubt, den Prozeß über mehrere Umdrehungen des Laufrades zu beobachten und die Meßzeit jeweils als Summe der ( $360^\circ$ -periodischen) Zeitintervalle zu bilden, die

zum betreffenden Paar  $(\beta, \gamma)$  gehören. Bei den 1-Grad-Schritten von  $\beta$ , wobei jedem Winkelintervall ein Zeitintervall  $\Delta t$  zukommt, und bei der Erfassung von insgesamt  $K$  vollständigen Laufradumdrehungen ist die Meßzeit  $= K \cdot \frac{\Delta t}{360}$ . Die Anzahl  $K$  sollte möglichst groß sein, denn je größer die Meßzeit ist, desto kleiner ist der mittlere Anteil des zufälligen Fehlers (Meßstörung) in  $N$  relativ, Anhang 2.

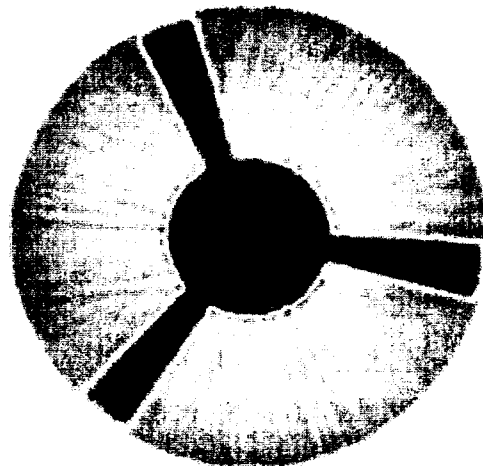
Die Zählrate  $N$  kann anhand der Intensität der Strahlungsquelle und der Absorption, die im Laufrad und im transportierten Medium auftritt, a priori abgeschätzt werden. Mit Hilfe solcher Schätzungen werden nun die bisher als determiniert angenommenen Projektionswerte in äquivalente Poisson-Zufallszahlen umgewandelt.

Die relative Standardabweichung von  $N$  ist um so größer ist, je kleiner  $N$  im Mittel ist, s. (A2-6). Die Meßstörung wiegt dadurch um so schwerer - letztlich im rekonstruierten Objektbild - je stärker der Projektionsstrahl absorbiert wird. Niedrige Werte treten insbesondere dann auf, wenn die Achse des Laufrades und ein oder zwei Flügel gleichzeitig durchstrahlt werden. Dann ist mit minimalen  $N$ -Mittelwerten von etwa 200 ... 300 Impulsen pro Meßzeit zu rechnen.

Die Nichtlinearität  $\ln \frac{N_0}{N}$  verursacht einen  $N$ -abhängigen systematischen Fehler (bias); die verfälschten Werte sind größer als die wahren Werte. Letzteres ist aber erst bei etwa  $N < 20$  relevant und wird deshalb hier nicht weiter berücksichtigt.

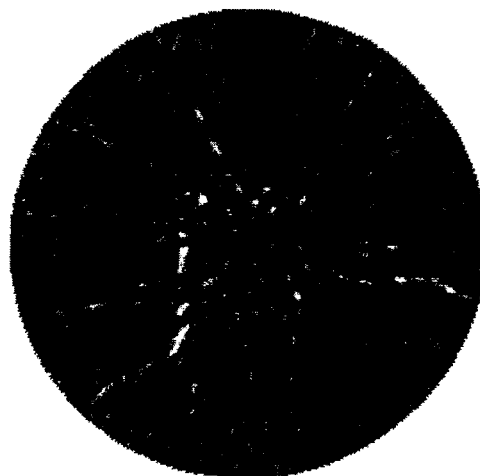
Für das Objekt im Bild 4-6a entsteht unter dem Einfluß der Meßstörung die Rekonstruktion im Bild 4-8.

**Bild 4-8** Rekonstruiertes Objektbild unter dem Einfluß der Meßstörung; das zugehörige Original befindet sich im Bild 4-6a



Um den bereits deutlich sichtbaren Störeinfluß noch hervorzuheben, wird das gleiche Objekt noch einmal bei einer anderen Realisierung der Meßstörung rekonstruiert (nicht dargestellt); die Differenz zu Bild 4-8 zeigt das Bild 4-9.

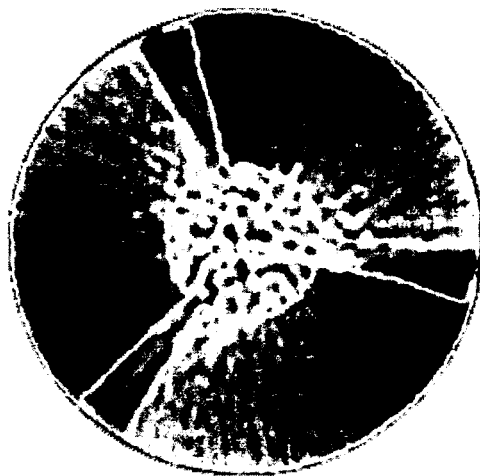
**Bild 4-9** Bildsubtraktion für die gleiche Objektfunktion bei unterschiedlicher Realisierung der Meßstörung



Auffällig ist daran, daß die störungsbedingten Bildfehler im Gebiet des Laufrades besonders intensiv sind und scheinbar sogar über dieses Gebiet radial hinausstrahlen. Ursache ist die vergleichsweise starke Absorption im Laufrad und die damit einhergehende Überhöhung der Meßstörung. Insofern wirkt die Meßstörung per Rückprojektion an den Ort ihrer Entstehung zurück.

Wie bereits unter determinierten Bedingungen (Abschnitt 4.3) wird die Differenz zwischen dem unbekanntem Objekt (Fall (3)) und dem Referenzobjekt (nur Flüssigkeit in der Pumpe, Fall (2)) gebildet, Bild 4-10.

**Bild 4-10** Das rekonstruierte Profil der Gasverteilung in der Pumpe unter dem Einfluß der Meßstörung



Wie im Bild 4-7 ist im Bild 4-10 die vorgegebene Gasdichteverteilung zu erkennen. Die Feinstruktur ist allerdings durch die bereits im Bild 4-9 festgestellten radialen Bildfehler gestört. Zur Verminderung dieser Bildfehler bzw. der sie verursachenden Meßstörung gibt es folgende Möglichkeiten:

- Erhöhung der Zählraten durch
  - Ausdehnung der Meßzeit oder
  - Erhöhung der Intensität der Strahlungsquelle
- Verwendung eines Laufrades mit verminderter Absorption, z.B. durch eine hohle Achse



## 5. Zusammenfassung

Für die Anwendung an Axialpumpen wird die tomographische Bildrekonstruktion nach dem Prinzip der gefilterten Rückprojektion betrachtet. Das Objekt der Betrachtung umfaßt das rotierende dreiflügelige Laufrad der Pumpe, dessen kreisrundes Gehäuse und vor allem das von der Pumpe transportierte Zweiphasenmedium. Dieses Objekt befindet sich in einer Meßanordnung, die aus einer punktförmigen Strahlungsquelle und 64 Detektoren besteht, wobei die Detektoren vom Objekt aus gesehen gegenüber der Quelle in einem Kreisbogensektor angeordnet sind. Die von der Quelle divergierend ausgehenden Projektionsstrahlen erfassen somit eine fächerförmige Ebene. Diese Ebene steht senkrecht zur Laufradachse. Weil das Objekt die Strahlen teilweise absorbiert, entsteht am Detektorbogen ein Schattenbild des Objektes. Durch die meßtechnische Erfassung eines Schattenbildes wird eine Projektionsfunktion gewonnen.

Das Laufrad dreht sich relativ zu der feststehenden Meßanordnung. Für eine vollständige Umdrehung des Laufrades werden in 1-Grad-Schritten insgesamt 360 Projektionsfunktionen gebildet. Zur Unterdrückung von Meßstörungen wird eine Mittelung über viele Umdrehungen vorgenommen.

Sämtliche (eindimensionalen) Projektionsfunktionen werden zusammengefaßt zu einer zweidimensionalen, über dem Fächerwinkel und dem Drehwinkel des Laufrades definierten Projektionsfunktion (Sinogramm). Da beide Winkel diskontinuierlich erfaßt werden, ist diese Funktion nur diskontinuierlich bzw. abgetastet über einem zweidimensionalen Raster von Stützstellen verfügbar. Wenigstens einer der beiden Winkel muß aber kontinuierlich sein, um ein lückenloses Bild des Objektes rekonstruieren zu können. Deshalb wird die Abtastfunktion entlang des Fächerwinkels interpoliert. Von drei verglichenen Interpolationsvarianten erweist sich die Spline-Interpolation als die günstigste. Diese Interpolation kann den Informationsverlust, den die Abtastung mit sich bringt, fast vollständig ausgleichen.

Im Rahmen der gefilterten Rückprojektion wird für die Filterung ein Hochpaß-Filter eingesetzt. Er ist eine realisierbare Näherung für einen formal nötigen, jedoch nicht realisierbaren Differenzierer. Die Ungenauigkeit dieser Näherung bewirkt unter anderem, daß im rekonstruierten Objektbild die dunklen Kanten von einem schmalen hellen Saum umgeben sind - eine Form des Gibbs'schen Phänomes. Die Rückprojektion besteht darin, die Werte der Projektionsfunktionen vom Detektorbogen her zurück zur Strahlungsquelle unter Berücksichtigung der Strahldivergenz über die Fläche des Objektbildes aufzutragen; dies für alle Drehwinkel. Die Operationen Filterung und Rückprojektion sind linear und deshalb miteinander vertauschbar.

Die gesuchte Gasverteilung im Zweiphasenmedium wird durch die Differenz zweier rekonstruierter Objektbilder bestimmt, nämlich indem von dem Bild mit der unbekanntenen Gasverteilung das (Referenz-)Bild vom rein flüssigen Medium subtrahiert wird. Die gewonnene Differenz ist empfindlich gegenüber den stochastischen Störanteilen der Meßsignale.

Die vorgenommenen theoretischen Betrachtungen und die Simulationsergebnisse rechtfertigen es insgesamt, die gefilterte Rückprojektion und somit auch die dafür entwickelten Algorithmen und Rechenprogramme am vorgesehenen Gegenstand einzusetzen.

## Anhang 1: Spline-Interpolation (kubisch)

Je zwei benachbarte Stützstellen  $(x_i, y_i)$  und  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  sollen durch ein Polynom

$$f_i(x) = a_i + b_i(x-x_n) + c_i(x-x_n)^2 + d_i(x-x_n)^3 \quad \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{A1-1})$$

so miteinander verbunden werden, daß die Polynome an den Stoßstellen sowohl in den Funktionswerten als auch in den 1. und 2. Ableitungen übereinstimmen. Ausgehend davon, daß

- an den Stoßstellen die Differenzen  $x-x_i$  verschwinden,
- die ersten Ableitungen benachbarter Polynome an den (inneren) Stoßstellen stetig sind, also  $f'_{i-1}(x_i) = f'_i(x_i)$  für  $i = 2, 3, \dots, n-1$ , und
- $x_{i+1} - x_i = x_0 = \text{konst. ist}$ ,

läßt sich finden, daß

$$a_i = y_i ; \quad b_i = \frac{1}{x_0}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6}x_0(y''_{i+1} + 2y''_i) ; \quad c_i = \frac{1}{2}y''_i ; \quad d_i = \frac{1}{6x_0}(y''_{i+1} - y''_i) \quad (\text{A1-2})$$

$$\text{mit } \frac{x_0^2}{6}[y''_{i-1} + 4y''_i + y''_{i+1}] = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} \quad (\text{A1-3})$$

Mit den gegebenen  $n$  Stützstellen lassen sich anhand eines linearen algebraischen Gleichungssystems  $n-2$  Polynome bestimmen. Über die äußeren 2. Ableitungen  $y''_1$  und  $y''_n$  darf frei verfügt werden. Üblicherweise wird  $y''_1 = y''_n = 0$  gesetzt.

Beispiel:

i:	1	2	3	4	5
x <sub>i</sub> :	1	2	3	4	5
y <sub>i</sub> :	0,5	1	2	3	3,5

Nach (A1-3) mit  $x_0 = 1$  folgt

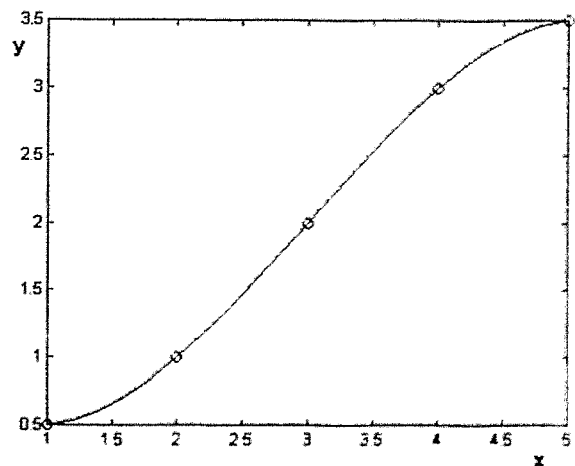
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y''_2 \\ y''_3 \\ y''_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und daraus  $y''_2 = 3/4$ ,  $y''_3 = 0$ ,  $y''_4 = -3/4$ .

Damit sind nach (A1-2) die Parameter

i:	1	2	3	4
a <sub>i</sub> :	0,5	1	2	3
b <sub>i</sub> :	3/8	3/4	9/8	3/4
c <sub>i</sub> :	0	3/8	0	-3/8
d <sub>i</sub> :	1/8	-1/8	-1/8	1/8

der Polynome  $f_1$  bis  $f_4$  bestimmt, s. Bild.



## Anhang 2: Meßstochastik

Die Messung der Projektionsfunktionen beruht auf der Zählung von Impulsen (Gamma-Quanten) über eine Meßzeit  $T_0$ . Die Impulse erscheinen unabhängig voneinander in zufälligen Zeitpunkten  $t_i, t_i \in [0, T_0]$ . Die Zufallsvariable  $N$  ist die Anzahl der Impulse, die pro Detektor, Laufrad-Drehwinkel und Zeitintervall  $[0, T_0]$  gezählt werden. Unter der Voraussetzung, daß der Zufallsprozeß  $N(t)$  stationär ist und damit die Zählrate  $N$  im Mittel konstant ist, liegt ein Poisson-Prozeß vor. Die Wahrscheinlichkeit, daß in  $[0, T_0]$  genau  $n$  Impulse gezählt werden, unterliegt deshalb der Dichtefunktion

$$w(N=n) = w(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (\text{A2-1})$$

mit  $n \in \mathbb{N}$ : Anzahl der Impulse im gegebenen Zeitintervall  
 $\bar{n}$ : Mittelwert.

Mittelwert und Varianz sind hierbei

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n w(n) = \bar{n} \quad (\text{A2-2})$$

$$E([N - E(N)]^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 w(n) = \bar{n} (= \sigma^2(N)) \quad (\text{A2-3})$$

Das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Impulsen ist  $\tau = t_i - t_{i-1}$ . Dieses Zeitintervall unterliegt der Exponentialverteilung

$$w(\tau) = \begin{cases} \frac{\bar{n}}{T_0} e^{-\frac{\bar{n}}{T_0} \tau} & \text{für } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A2-4})$$

Mittelwert und Varianz sind dann

$$\bar{\tau} = \frac{T_0}{\bar{n}}, \quad \sigma^2(\tau) = \left( \frac{T_0}{\bar{n}} \right)^2 \quad (\text{A2-5a,b})$$

Gemäß (A2-3) ist die relative (auf den Mittelwert  $\bar{n}$  bezogene) Standardabweichung

$$\frac{\sigma(N)}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (\text{A2-6})$$

Aus (A2-6) geht hervor, daß die zufälligen Schwankungen des Zählwertes  $n$  bei zunehmendem Mittelwert  $\bar{n}$  relativ abnehmen<sup>12</sup>. Im Interesse eines geringen stochasti-

---

<sup>12</sup> Tendenziell wird die Dichtefunktion  $w(n)$  für  $\bar{n} \rightarrow \infty$  zu einem  $\delta$ -Impuls an der Stelle  $\bar{n}$  und entsprechend wird der Zufallsprozeß  $N(t)$  zu einem determinierten Prozeß.

schen Störanteils sind also möglichst hohe Zählraten  $N$  wünschenswert. Dies ist erreichbar durch

- große Meßzeit  $T_0$  oder
- hohe Intensität der Strahlungsquelle.

Eine intensive Strahlungsquelle bedeutet einen großen Mittelwert  $\bar{n}$  und deshalb nach (A2-5a) einen kleinen mittleren Impulsabstand  $\bar{\tau}$ . Dies ist praktisch ungünstig, denn Impulse sind meßtechnisch erst ab einem gewissen Mindestabstand voneinander unterscheidbar. Einander zu nahe Impulse äußern sich wie ein einziger Impuls. Der durch solche Überdeckungen verursachte Zählverlust kann zwar näherungsweise korrigiert werden, doch nur solange  $\bar{\tau}$  nicht allzu klein ist.

Eine Vergrößerung der Meßzeit  $T_0$  hat, da  $\bar{n}$  proportional  $T_0$  ist, keinen Einfluß auf den mittleren Impulsabstand  $\bar{\tau}$ . Die Meßzeit darf deshalb formal beliebig groß gewählt werden. Eine praktische Grenze setzt hierbei allenfalls die mögliche Experimentierdauer.

## Literatur

- Herman, G.T.; Naparstek, A.: *Fast image reconstruction based on a radon inversion formula appropriate for rapidly collected data*. Siam J. Appl. Math., 33 (1977), 511 - 533
- Jähne, B.: *Digitale Bildverarbeitung*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest, 1993
- Kak, A. C.; Slaney, M.: *Principles of Computerised Tomographic Imaging*. IEEE Press. New York, 1988
- Radon, J.: *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*. Sächsische Akademie der Wissenschaften, 69 (1917), 262 - 277
- Schrüfer, E.: *Signalverarbeitung*. Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1992