

WISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE BERICHTE

FZR-347

Juni 2002

ISSN 1437-322X



Archiv-Ex.:

Erik Franke und Dietrich Hoppe

**Bestimmung der Aktivitätsverteilung in
Gebinden mit geringfügig radioaktivem
Material unter Verwendung großflächiger,
unkollimierter, feststehender Gamma-
Szintillationsdetektoren**

Herausgeber:
Forschungszentrum Rossendorf e.V.
Postfach 51 01 19
D-01314 Dresden
Telefon +49 351 26 00
Telefax +49 351 2 69 04 61
<http://www.fz-rossendorf.de/>

Als Manuskript gedruckt
Alle Rechte beim Herausgeber

Erik Franke und Dietrich Hoppe

**Bestimmung der Aktivitätsverteilung in
Gebinden mit geringfügig radioaktivem Material
unter Verwendung großflächiger,
unkollimierter, feststehender Gamma-
Szintillationsdetektoren**

Kurzfassung

Die Verwendung von großflächigen Gamma-Detektoren zeichnet sich durch hohe Effektivität und damit geringe Messzeit aus. Dagegen sind mit ihnen keine hohen Ortsauflösungen bei der Rekonstruktion der Aktivitätsverteilung möglich. Zur Untersuchung der Rekonstruierbarkeit unbekannter Aktivitätsverteilungen werden zwei in der Tomographie gebräuchliche Verfahren verglichen, ein algebraisches (iterativ) und ein analytisches (gefilterte Rückprojektion). Beide Verfahren erbringen qualitativ ähnliche Ergebnisse. Reale Aktivitätsverteilungen werden nach beiden Verfahren zufriedenstellend rekonstruiert.

Abstract

High efficiency and short measurement times are remarkable features of the use of large area Gamma-Plast detectors. However no high spatial resolution of the reconstructed activity distribution can be reached. Two known tomographic methods reconstructing the activity distribution were investigated: an algebraic (iterative) and an analytical (filtered back projection) one. Both methods give qualitative similar results and each can reconstruct the activity distribution satisfactorily.

Inhalt

1 Einleitung	3
2 Theoretische Grundlagen	4
2.1 Algebraisches Verfahren	4
2.2 Analytisches Verfahren	5
3 Praktische Anwendungen	8
3.1 Algebraisches Verfahren	8
3.2 Analytisches Verfahren	14
4. Zusammenfassung	20
Literatur	20

1 Einleitung

Für die Freimessung von Stoffen mit geringfügiger Aktivität kommen Freimessanlagen mit großflächigen Plastiksintillationsdetektoren zum Einsatz. Das Messgut befindet sich dabei in speziellen Behältnissen, sogenannten Messgebinden¹. Aus den gewonnenen Messdaten (Zählraten von Gamma-Quanten) wird mit Hilfe von Detektorwirkungsgraden die integrale Gebindeaktivität berechnet. Die Detektorwirkungsgrade werden mit Hilfe von Kalibriergebinden bestimmt. Häufig werden Kalibriergebinde mit einer homogenen Aktivitätsverteilung verwendet. Die damit bestimmten Detektorwirkungsgrade dürfen streng genommen nur dann benutzt werden, wenn die Aktivität im Messgebinde auch wirklich homogen verteilt ist. Bei Abweichung von der homogenen Aktivitätsverteilung wird die Aktivität unter- oder überschätzt. Um eine Unterschätzung (nicht konservativ) zu vermeiden, muss eine möglichst genaue Aussage über die Aktivitätsverteilung im Messgebinde gemacht werden, an Hand derer entschieden werden kann, ob ein konservatives Messergebnis vorliegt. Das bedeutet, dass die homogene Kalibrierung nur im Zusammenhang mit einer Bestimmung der Aktivitätsverteilung im Messgebinde verwendet werden darf. Aus diesem Gesamtzusammenhang behandelt die vorliegende Arbeit die Rekonstruktion der Aktivitätsverteilung und damit verbundene Probleme.

Die vom Messgebinde in alle Richtungen ausgehende Strahlung soll effektiv und dabei technisch zuverlässig erfasst werden. Großflächige Detektoren leisten dies insofern, als eine geringe Anzahl von Detektoren genügt, um das Messgebinde fast vollständig zu umgeben. Nachteilig an großen Detektoren ist aber, dass - im Unterschied zu üblichen Problemstellungen der Emissions-Tomographie - ihre Richtungsempfindlichkeit nicht durch Kollimatoren eingengt werden kann; je enger die Blickrichtung der Detektoren ist, desto höhere Ortsauflösungen können bei Rekonstruktionen im allgemeinen erreicht werden. Somit ist abzusehen, dass im vorliegenden Fall keine allzu hohe Ortsauflösung möglich ist. Außerdem ist wegen der Größe der Detektoren eine Relativbewegung zwischen dem Messgebinde und den Detektoren technisch nicht möglich. Eine solche wird üblicherweise dann angestrebt, wenn nur wenige Detektoren zur Verfügung stehen, siehe z.B. [Ha98]. Untersucht werden soll, inwieweit die Aktivitätsverteilung im Messgebinde unter den gegebenen Messbedingungen rekonstruiert werden kann. Zur Lösung der Rekonstruktionsaufgabe werden ein algebraisches und ein analytisches Lösungsverfahren angewendet, die beide in der Tomographie gebräuchlich sind. Sie sind mathematisch äquivalent, unterscheiden sich jedoch in ihrer Realisierung und dabei insbesondere im Umgang mit Freiheiten grundlegend.

Beim algebraischen Rekonstruktionsverfahren wird das Volumen des Messgebindes in eine Anzahl Volumenelemente bzw. Teilvolumina unterteilt. Der Beitrag der Aktivität jedes einzelnen Volumenelements zur Zählrate jedes Detektors wird mit Hilfe eines realitätsnahen 3D-Monte-Carlo-Modells bestimmt. Mit Hilfe der Zählraten der Detektoren kann dann die Aktivität jedes Volumenelements aus einem System linearer Gleichungen bestimmt werden. Zu erwarten ist ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem, da jeder Detektor lediglich einen integralen Wert für das gesamte Messgebinde liefert. Größere Veränderungen der Aktivitätsverteilung im Messgebinde führen daher nur zu geringen Änderungen der Messdaten. Eine eindeutige Lösung ist nur dann möglich, wenn die Zahl der Volumenelemente nicht größer als die Zahl der Detektoren ist. Bei einer größeren räumlichen Auflösung (mehr Volumenelemente als Detektoren) gibt es im allgemeinen mehrere Lösungen für einen Satz von Messdaten.

Das analytische Rekonstruktionsverfahren beruht auf der inversen Radon-Transformation [RA17] und wird in der Tomographie als gefilterte Rückprojektion bezeichnet [KS88]. Die Rückprojektion besteht im vorliegenden Fall darin, dass die von den Strahlungsquellen im Messgebinde her an den Detektoren eintreffende Strahlung in entgegengesetzter Richtung und mit den Zählraten der Detektoren gewichtet zu den Quellorten zurückprojiziert wird. Durch eine zusätzliche 3D-Filterung entsteht ein Abbild der gesuchten räumlichen Aktivitätsverteilung.

¹ Gebinde: Oberbegriff für größere Behälter für den Transport und die Lagerung von Gütern

Beide Rekonstruktionsverfahren werden auf die konkreten Verhältnisse der Freimessanlage RTM642 der Fa. RADOS Technology GmbH angewendet. Diese Anlage besitzt eine Messkammer mit den Innen-Maßen L 1320 x B 1000 x H 1320 mm. An den Innenwänden der Kammer sind in einer annähernden 4 π -Geometrie (die Kammer fast geschlossen umhüllend) 16 Plastiksintillationsdetektoren angebracht. Als Messgebände wird eine 550-Liter-Europaletten-Box betrachtet, die etwa mittig in der Messkammer steht. Bild 1-1 zeigt schematisch die geometrischen Verhältnisse von Messkammer, Messgebände und Detektoren.

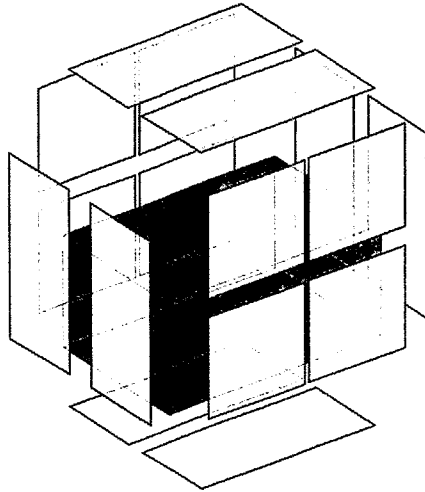


Bild 1-1: Das zu untersuchende quaderförmige Messgebände (dunkelgrau) umgeben von 16 Detektoren (hellgrau)

Der Anschauung nach ist unter den bestehenden Messbedingungen abzusehen, dass lokale Aktivitäten bzw. Quellorte von Strahlung um so genauer rekonstruiert werden können, je größere Unterschiede sie innerhalb den Messdaten hervorrufen. Daher dürften sich vornehmlich einzelne, weit außerhalb der Mitte (nahe der Oberfläche) des Messgebändes befindliche lokale Quellen verlässlich rekonstruieren lassen. Demgegenüber wird zwischen einer zentral gelegenen Quelle und einer homogen über das Volumen des Messgebändes verteilten Aktivität kaum zu unterscheiden sein, denn beide Verteilungen regen alle Detektoren etwa gleich an.

Die beiden Rekonstruktionsverfahren werden zuerst theoretisch betrachtet und danach praktisch eingesetzt, jeweils erst das algebraische und dann das analytische Verfahren.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Algebraisches Verfahren

Bei einer Einteilung des Messgebändes in n_{vol} Volumenelemente erhält man bei der Annahme einer homogenen Aktivitätsverteilung in jedem Volumenelement die Gleichungen für die 16 Zählraten der Detektoren in der Form:

$$b_j = \sum_i p_{j,i} a_i \quad , i = 1 \dots n_{\text{vol}}, j = 1 \dots 16 < n_{\text{vol}} \quad (2.1-1)$$

b_j = Zählrate des j – ten Detektors [Imp/s]

a_i = Aktivität im i – ten Volumenelemente [Bq]

$p_{j,i}$ = Zählrate im j – ten Detektor infolge der Aktivität von 1 Bq im i – ten Volumenelement [Imp/s/Bq]

Aus der (j, i) -Matrix, welche von den bekannten Elementen $p_{j,i}$ gebildet wird, sowie aus den Messdaten b_j sollen anhand von (2.1-1) die unbekannt Aktivitätswerte a_i bestimmt werden. Die Matrix wird auf der Grundlage eines realistischen 3D-Modells mit Hilfe des Monte-Carlo-Programms MCNP berechnet [SE99]. Zur Berücksichtigung der Detektorempfindlichkeiten werden alle Zählraten mit detektorabhängigen Faktoren korrigiert. Für die Bestimmung dieser Korrekturfaktoren wird ein Experiment mit bekannter Quellverteilung (zentrale Punktquelle) mit den Ergebnissen der entsprechenden Monte-Carlo-Rechnung verglichen. Die Korrekturfaktoren bestimmen sich aus dem Verhältnis von gemessener und berechneter Zählrate für die einzelnen Detektoren.

Wegen $n_{\text{vol}} > 16$ ist (2.1-1) unterbestimmt. Aus dem Lösungsraum dieses Gleichungssystems soll deshalb mit einem geeigneten Kriterium eine Einzellösung ausgewählt werden. Außerdem soll (2.1-1) für große n_{vol} zweckmäßigerweise iterativ gelöst werden. Weil im vorliegenden Fall $b_j, p_{j,i}, a_i > 0 \forall i, j$ unterstellt werden kann, eignet sich für das Kriterium die sogenannte Kreuz-Entropie in ihrer Erweiterung nach Csiszár [Cs91], Snyder [SSO92]. Diese auch als I - Divergenz bezeichnete Größe lautet hier

$$I(b_j \| \hat{b}_j) = \sum_j b_j \log \left(\frac{b_j}{\hat{b}_j} \right) - \sum_j (b_j - \hat{b}_j), \quad (2.1-2)$$

wobei nach (2.1-1) $\hat{b}_j = \sum_i p_{j,i} a_i$ eine Approximation von b_j ist. Für das Optimierungsproblem

$$\sum_j b_j \log \left(\frac{b_j}{\sum_i p_{j,i} a_i} \right) - \sum_j \left(b_j - \sum_i p_{j,i} a_i \right) = \text{Min!}_{a_i} \quad (2.1-3)$$

gibt es ein Minimum unter der notwendigen Bedingung

$$-\sum_j \frac{p_{j,i} b_j}{\sum_i p_{j,i} a_i} + \sum_i p_{j,i} = 0 \quad \text{bzw.} \quad 1 = \frac{1}{\sum_j p_{j,i}} \sum_j \frac{p_{j,i} b_j}{\sum_i p_{j,i} a_i}. \quad (2.1-4a,b)$$

Durch Multiplikation von a_i auf beiden Seiten von (2.1-4b) entsteht die Iterationsvorschrift

$$a_i^{v+1} = \frac{a_i^v}{\sum_j p_{j,i}} \sum_j \frac{p_{j,i} b_j}{\sum_i p_{j,i} a_i^v}. \quad (2.1-5)$$

Nach (2.1-2) werden die Zählraten b_j durch $\sum_i p_{j,i} a_i^\infty$ nichtnegativ, monoton und im Sinne von (2.1-3) optimal approximiert. Anwendungen folgen im Abschnitt 3.1.

2.2 Analytisches Verfahren

Verwendet wird das auf der inversen Radon-Transformation beruhende tomographische Verfahren der gefilterten Rückprojektion. Die Aktivität bzw. Strahlungsemission im Volumen des untersuchten Messgebendes wird dafür als eine Verteilung von Punktquellen aufgefasst. Näher betrachtet wird die Rekonstruktion einer einzigen Punktquelle. Durch die Superposition sämtlicher solcher Punktabbildungen entsteht am Ende ein vollständiges Abbild der gesuchten Aktivitätsverteilung. Vorausgesetzt wird, dass die Strahlungsemission jeder Punktquelle isotrop, d.h. in alle Richtungen gleich ist. Somit ist die örtliche Strahlungsdichte nur eine

nur eine Funktion des Abstandes von der Punktquelle. Das untersuchte Messgebilde sei von Detektoren lückenlos umhüllt; die Hülle gilt für die emittierte Strahlung als Projektionsfläche².

Zur geometrischen Beschreibung des Rekonstruktionsproblems dienen die Kugelkoordinaten r, φ, θ mit $r \geq 0$: Radius, $0 \leq \varphi < 2\pi$: azimuthaler Winkel, $0 \leq \theta < \pi$: polarer Winkel. Herausgegriffen sei ein einzelner, aus der betrachteten Punktquelle in die (φ_0, θ_0) - Richtung weisender Projektionsstrahl der Länge r , beschrieben durch die zweidimensionale Deltafunktion

$$\delta^2(r(\varphi - \varphi_0), r(\theta - \theta_0)) = \begin{cases} \infty & \text{für } \varphi = \varphi_0 \text{ und } \theta = \theta_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta^2(\varphi, \theta) d\varphi d\theta = 1 \quad (2.2-1)$$

mit $r(\varphi - \varphi_0)$ und $r(\theta - \theta_0)$ als Kreisbogenstücke auf einer gedachten Kugeloberfläche, Bild 2.2-1.

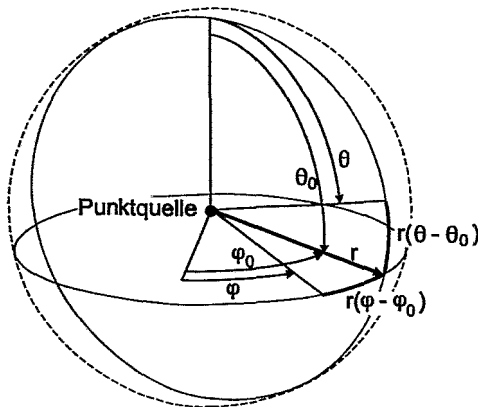


Bild 2.2-1: Die Kreisbogenstücke $r(\varphi - \varphi_0)$ und $r(\theta - \theta_0)$ für einen Projektionsstrahl der Länge r

Die Punktquelle erscheint als räumlicher Deltaimpuls

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } r = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \int_0^\infty \delta(x) dr = 1. \quad (2.2-2)$$

Innerhalb des Verfahrens der gefilterten Rückprojektion wird zuerst die Rückprojektion vorgenommen. Dabei wird jeder an den Detektoren eintreffende Projektionsstrahl formal in entgegengesetzter Richtung zu seinem Quellort zurückprojiziert, wobei der jeweilige Messwert über diese gesamte Strecke „verschmiert“ wird. Sämtliche Rück-Projektionsstrahlen treffen am Quellort zusammen. Anschaulich ist klar, dass sich diese Strahlen auf ihrem Weg zum Quellort zunehmend überschneiden und daher die Strahlungsdichte allmählich anwächst, Bild 2.2-2.

² Obgleich es im vorliegenden Fall streng genommen keine Projektion gibt, wird dieser Begriff trotzdem aus der Tomographie übernommen.

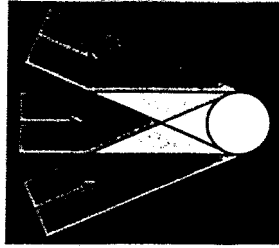


Bild 2.2-2: Zunehmende Überschneidungen der Rück-Projektionsstrahlen bei deren Annäherung an den Quellort, schematisch

Die Integration der Rück-Projektionsstrahlen über alle Richtungen ergibt

$$B(r, \varphi, \theta) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta^2(r(\varphi - \varphi_0), r(\theta - \theta_0)) d\varphi d\theta . \quad (2.2-3)$$

In der Theorie der Delta-Distributionen gibt es die allgemeine Beziehung [Br99]

$$\delta^2(ax, by) = \frac{1}{|ab|} \delta^2(x, y) . \quad (2.2-4)$$

Mit ihr folgt aus (2.2-3)

$$B(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta^2((\varphi - \varphi_0), (\theta - \theta_0)) d\varphi d\theta = \frac{1}{r^2} . \quad (2.2-5)$$

Im Einklang mit Bild 2.2-2 beschreibt $1/r^2$ die Abhängigkeit der Strahlungsdichte im Abstand r von der Punktquelle. Um von $1/r^2$ formal weiter zum ursächlichen Impuls $\delta(r)$ zu gelangen, wird $B(r, \varphi, \theta)$ mit einer noch unbekanntem Hilfsfunktion $h(r)$ gefaltet:

$$\frac{1}{r^2} * h(r) = \delta(r) \quad (2.2-6)$$

Da nun aber $1/r^2$ für $r = 0$ nicht erklärt ist, existiert keine Funktion $h(r)$, welche (2.2-6) erfüllt. Allerdings können Näherungen (Regularisierungen) von h in praktisch beliebiger Genauigkeit gefunden werden. Gebräuchlich sind spezielle Hochpass- oder Bandpass-Filter. Filterart und -parameter sind in gewissem Grade frei (problemangepasst) wählbar. Im vorliegenden Fall ist ein Bandpass mit relativ niederfrequentem Durchlassbereich sinnvoll. Näher wird die Filterproblematik hier nicht betrachtet.

Während für eine einzige Punktquelle noch ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang zu den Messdaten besteht, ist dies für eine Verteilung aus vielen Punktquellen praktisch ausgeschlossen. A priori bekannt ist nur, dass Strahlung allein aus dem Volumen des Messgebändes kommen kann. Folglich sind Rückprojektionen nur dorthin sinnvoll. Wie aber einzelne Punkte dieses Volumens quantitativ an den Messdaten beteiligt sind, ist nicht bekannt. Die diesbezüglich bestehende Mehrdeutigkeit ist der Mehrdeutigkeit von (2.1-1) im algebraischen Verfahren äquivalent. Willkürlich werden alle Rück-Projektionsstrahlen, die von einem einzelnen Punkt eines Detektors aus ins Gebindevolumen gerichtet sind, gleich gewichtet, nämlich mit der Zählrate des betreffenden Detektors. Eine zusätzliche richtungsabhängige Wichtung der Rück-Projektionsstrahlen gibt es nicht, denn wegen des Fehlens von Koll-

wird die Empfindlichkeit jedes einzelnen Punktes der Detektorflächen als richtungsunabhängig, d.h. für alle Richtungen gleich angenommen ³.

Das Ergebnis der gefilterten Rückprojektion gehört infolge der Regularisierung eventuell nicht zum Lösungsraum des algebraischen Problems (2.1-1). Allerdings wird der Abstand im allgemeinen nicht groß sein. Deshalb liegt es nahe, die auf analytischem Wege bestimmte Aktivitätsverteilung als Anfangsnäherung für die im Abschnitt 2.1 beschriebene Iteration zu verwenden. Im weiteren wird davon aber nicht Gebrauch gemacht.

Die Gesamtheit aller Impulsantworten nach (2.2-5), d.h. die vollständige ungefilterte Rückprojektion entspricht qualitativ der räumlichen Verteilung der Strahlungsdichte. Aus ihr kann die Strahlungsdichte in der Oberfläche des Messgebindes separiert werden. Die so entstehende 2D-Strahlungsdichte-Funktion ist der Anschauung leichter zugänglich als die 3D-Aktivitätsverteilung; die Aktivität kann - wie eingangs erläutert - ohnehin nur nahe der Oberfläche des Messgebindes verlässlich rekonstruiert werden. Zur Berechnung eines homogenen Kalibriergebindes wird die Oberflächen-Strahlungsdichte nicht herangezogen.

3 Praktische Anwendungen

Mit Hilfe von einfachen Anwendungsfällen wird überprüft, wie die Aktivitätsverteilung in einem Abfallgebände mit Hilfe der beiden beschriebenen Verfahren rekonstruiert wird. Als Strahlenquelle wird eine kleinvolumige Co-60-Quelle benutzt, die an unterschiedlichen Orten innerhalb der Europaletten-Box (Messgebände) positioniert wird. Betrachtet werden die beiden Fälle der leeren und mit Sand gefüllten (1,5 g/cm³) Box. Die Positionen der Co-60-Quelle sind in der Tabelle 3-1 zusammengestellt.

Material	Position
Leere Box	23
	1
Sand	14
	11
	17
	19
	27

Tabelle 3-1: Quell-Positionen

Die Nummern der Quellpositionen beziehen sich auf die Volumendiskretisierung im Bild 3.1-1. Die Quelle wird jeweils im Zentrum des Volumenelements positioniert. Für die 7 Fallbeispiele der Tabelle 3-1 werden die Nettozählraten (abzüglich der Untergrundstrahlung) der 16 Detektoren gemessen. Die Korrekturfaktoren für die Matrixelemente $p_{j,i}$ (algebraisches Verfahren) bzw. für die Zählraten der Detektoren (beim analytischen Verfahren)⁴ werden mit Hilfe von Quellen bestimmt, die sich in den Positionen 23 und 14 befinden.

3.1 Algebraisches Verfahren

Bei der Anwendung des algebraischen Verfahrens werden eine grobe Diskretisierung mit 27 (3x3x3) und eine feinere mit 105 (7x5x3) Volumenelementen verwendet. Diese Diskretisierungen sind schematisch in Bild 3.1-1 und 3.1-2 dargestellt.

³ Weil die einzelnen Punkte im Detektor flächenhaft angeordnet sind, hat dieser eine gewisse Richtcharakteristik. Für die Rückprojektion hat diese jedoch keine Bedeutung.

⁴ Diese Unterscheidung hat rein technische Gründe.

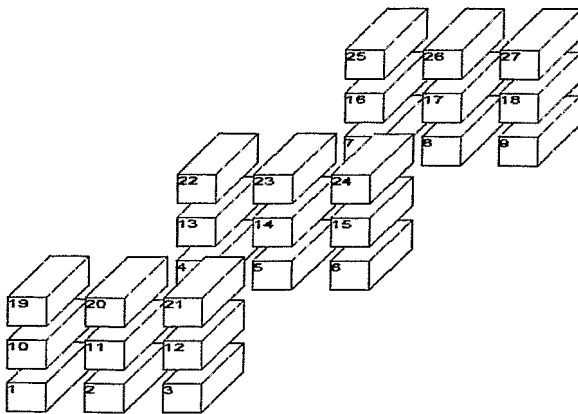


Bild 3.1-1: Diskretisierungsschema mit 27 (in Wirklichkeit lückenlos angeordneten) Volumenelementen

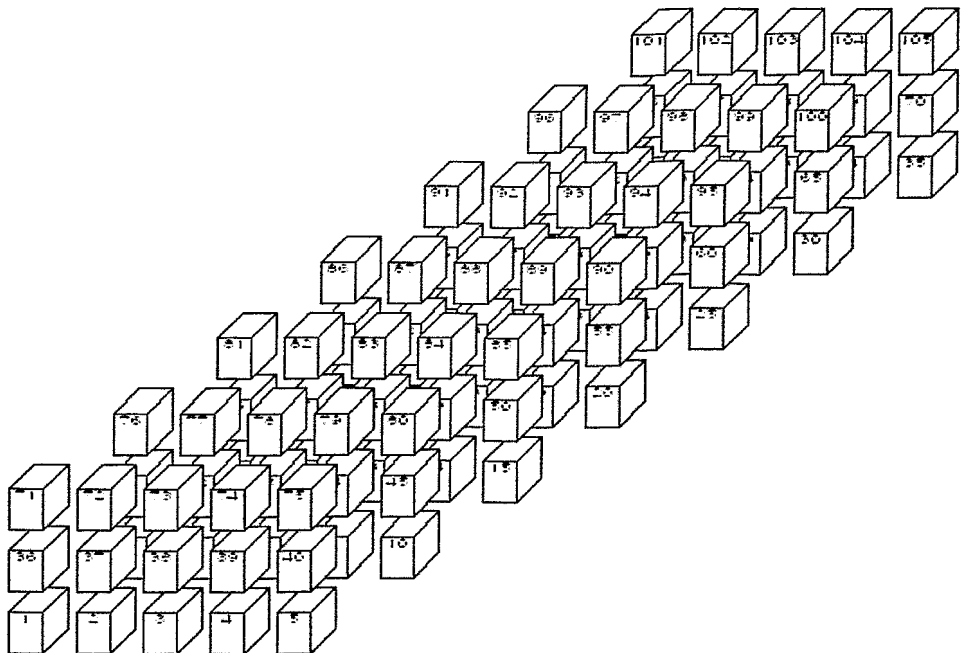
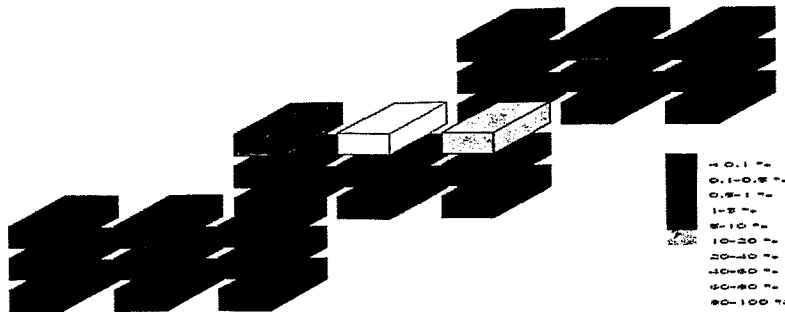


Bild 3.1-2: Diskretisierungsschema mit 105 Volumenelementen

Die feine Diskretisierung wird nur für das mit Sand gefüllte Messgebilde benutzt. Die Iteration entsprechend der Vorschrift 2.1-5 wird abgebrochen wenn die Bedingung

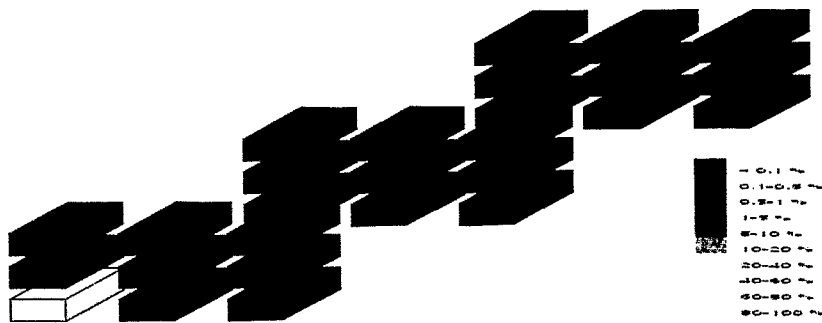
$$\frac{1}{b_j} \left| b_j - \sum_i p_{j,i} a_i \right| < \varepsilon \quad , \varepsilon = 0.05 \quad (3.1-1)$$

erfüllt ist, d.h. die Zählraten bis auf einen Fehler von 5 % reproduziert sind. Als Anfangsverteilung für die Aktivitätswerte a_i dient nachfolgend immer eine Gleichverteilung über alle Volumenelemente. Die Ergebnisse des algebraischen Verfahrens sind in den Bildern 3.1-3 bis 3.1-9 dargestellt.



Aktivitätsverteilung PE-Box

Bild 3.1-3: Aktivitätsverteilung leere Box, Quellposition 23



Aktivitätsverteilung PE-Box

Bild 3.1-4: Aktivitätsverteilung leere Box, Quellposition 1



Bild 3.1-5: Aktivitätsverteilung Sand-Box, Quellposition 11



Bild 3.1-6: Aktivitätsverteilung Sand-Box, Quellposition 17



Bild 3.1-7: Aktivitätsverteilung Sand-Box, Quellposition 19

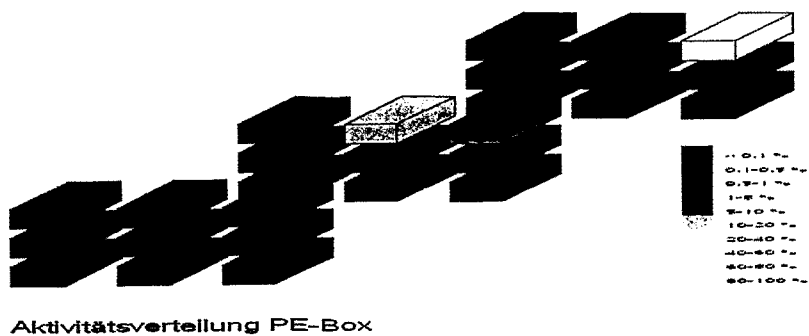


Bild 3.1-8: Aktivitätsverteilung Sand-Box, Quellposition 27

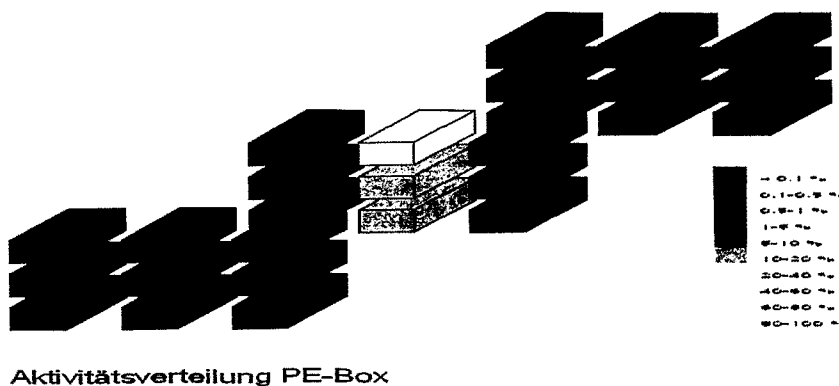
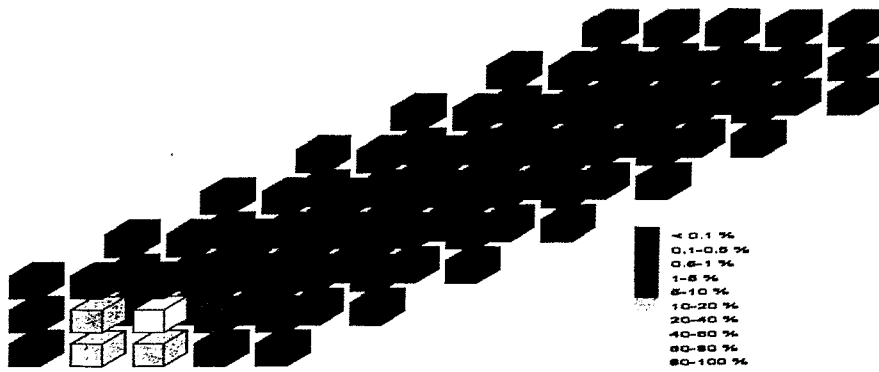


Bild 3.1-9: Aktivitätsverteilung Sand-Box, Quellposition 14

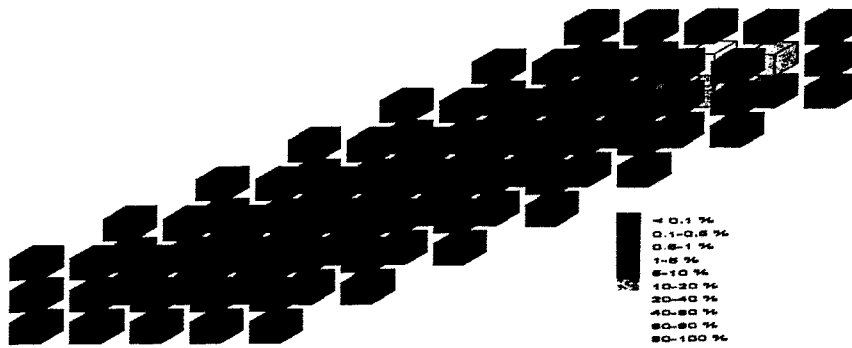
Die Aktivitätswerte sind in den Bildern durch eine Graustufenskala dargestellt. Eine Graustufe bestimmt den prozentualen Anteil der Aktivität im Volumenelement bezogen auf die integrale Gesamtaktivität im Messgebilde. Die Ergebnisse zeigen erwartungsgemäß, dass die oberflächennahen Quellpositionen relativ gut lokalisiert werden. Dagegen wird die Rekonstruktion unscharf, wenn sich die Quelle näher am Zentrum des Messgebildes befindet. Für diesen Fall gibt es zu viele verschiedene Quellverteilungen, die ähnliche Detektorzählraten liefern.

Die Ergebnisse für die feinere Diskretisierung sind in den Bildern 3.1-10 bis 3.1-14 dargestellt. Sie zeigen keine prinzipiellen Unterschiede im Vergleich zu der größeren Diskretisierung. Das Bild 3.1-14 bestätigt nochmals deutlich, dass es praktisch nicht möglich ist, eine Quelle im Zentrum der Box zu lokalisieren.



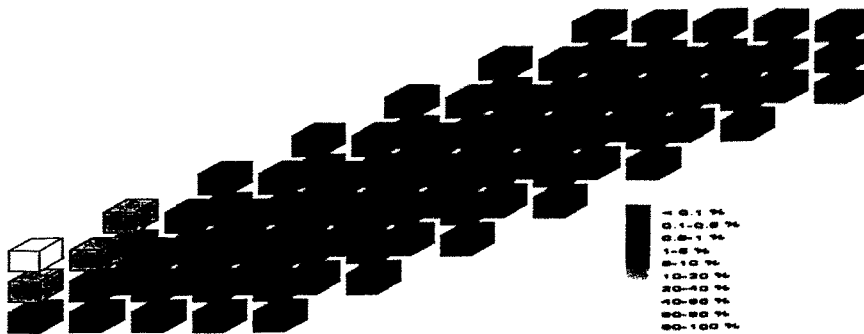
Aktivitätsverteilung PE-Box

Bild 3.1-10: Aktivitätsverteilung Sand-Box, Quellposition 11



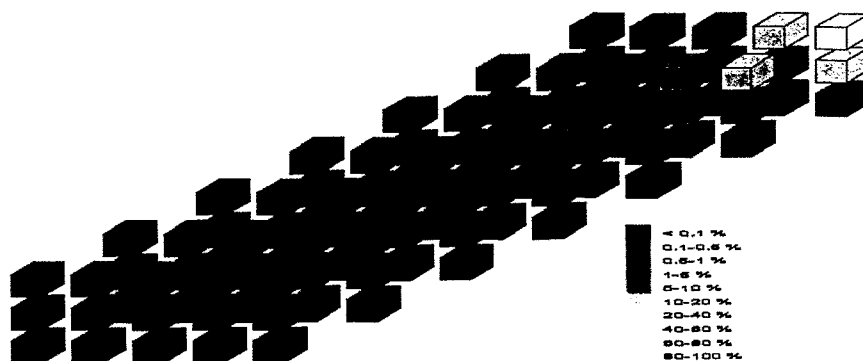
Aktivitätsverteilung PE-Box

Bild 3.1-11: Aktivitätsverteilung Sand-Box, Quellposition 17



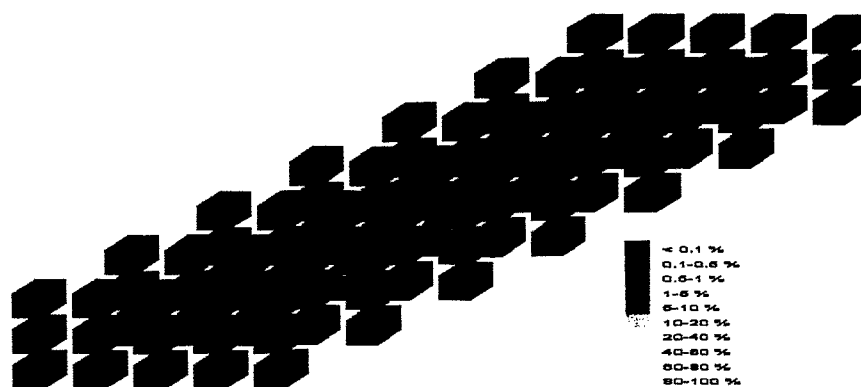
Aktivitätsverteilung PE-Box

Bild 3.1-12: Aktivitätsverteilung Sand-Box, Quellposition 19



Aktivitätsverteilung PE-Box

Bild 3.1-13: Aktivitätsverteilung Sand-Box, Quellposition 27



Aktivitätsverteilung PE-Box

Bild 3.1-14: Aktivitätsverteilung Sand-Box, Quellposition 14

3.2 Analytisches Verfahren

Anders als im Abschnitt 2.2 vorausgesetzt, umschließen die Detektoren das Messgebilde nicht lückenlos (vgl. Bild 1-1) und somit nicht für jeden in (2.2-3) vorkommenden Winkel φ , θ . Die Detektorflächen werden deshalb formal erweitert, Bild 3.2-1, wobei die Zählraten der Detektoren entsprechend den Flächenänderungen korrigiert werden.

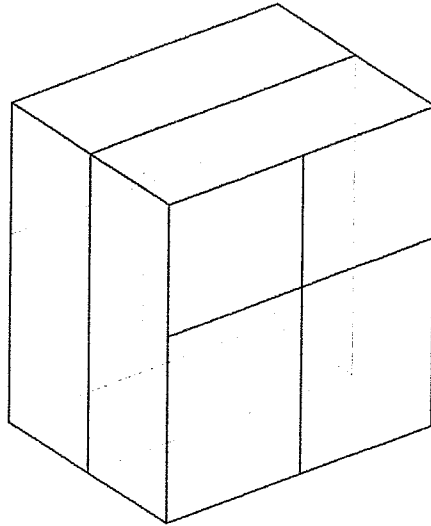


Bild 3.2-1: Formale Erweiterung der Detektorflächen aus Bild 1-1 zu einer geschlossenen Hülle

Die im Abschnitt 3.1 algebraisch behandelten Experimente werden nun analytisch ausgewertet. Eingehender wird dabei der Fall betrachtet, dass sich die Quelle im Volumenelement 1 des Schemas in Bild 3.1-1 befindet. Die von den Detektoren ausgehenden Rückprojektionsstrahlen sind mit den jeweiligen Zählraten der Detektoren gewichtet. Der Anschaulichkeit halber wird die Rückprojektion zuerst nur zu einem einzigen Punkt hin vorgenommen, nämlich zum Mittelpunkt des Messgebindes. Er ist der Schnittpunkt der drei im Bild 3.2-2 grau hervorgehobenen Ebenen. Die an sich dreidimensionale Rückprojektion wird nur in diesen Ebenen dargestellt, Bild 3.2-3.

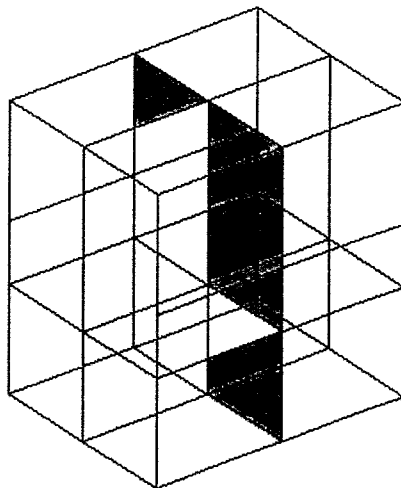


Bild 3.2-2: Ausgewählte Betrachtungsebenen

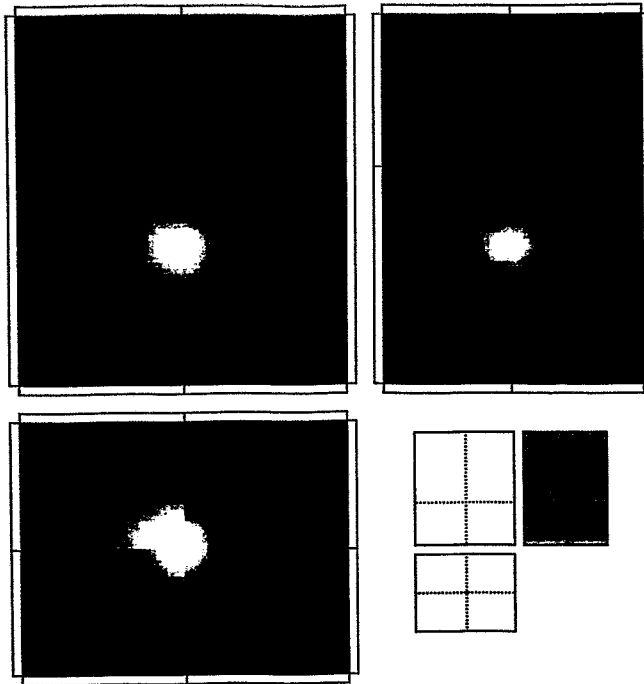


Bild 3.2-3: Rückprojektion zum Mittelpunkt des Messgebindes, dargestellt in den drei Betrachtungsebenen aus Bild 3.2-2. Der Grauwerte-Bereich⁵ ist hier logarithmisch verkürzt. An den Rändern sind die Detektoren angedeutet.

Im Bild 3.2-3 ist erkennbar, dass die Strahlungsdichte gemäß (2.2-5) proportional $1/r^2$ zum gewählten Zielpunkt hin zunimmt, vgl. auch Bild 2.2-2. Die Strahlungsdichte ist dabei offensichtlich anisotrop. Dies bedeutet, dass die im Messgebäude vorhandene Aktivität nicht im betrachteten Punkt konzentriert sein kann. Statt dessen ist im vollständigen Strahlungsdichtefeld (Rückprojektion in ihrer Gesamtheit) ein Gefälle in diesem Punkt zu vermuten. Die Rückprojektionen zu allen Punkten des Messgebindes⁶ (alle Impulsantworten nach (2.2-5)) werden zur vollständigen Rückprojektion überlagert. Diese 3D-Funktion wird wieder nur in den drei Betrachtungsebenen dargestellt, Bild 3.2-4.

⁵ In diesem und allen weiteren Grauwertbildern erscheint der jeweils kleinste/größte vorkommende Absolutwert schwarz/weiß. Unterschiedliche Grauwertbilder sind daher nicht ohne weiteres miteinander vergleichbar.

⁶ Statt Punkten erscheinen praktisch gleichgroße, disjunkte und rasterförmig angeordnete Volumenelemente. Die Anzahl der Volumenelemente wird bei der analytischen Methode viel größer als bei der algebraischen Methode gewählt.

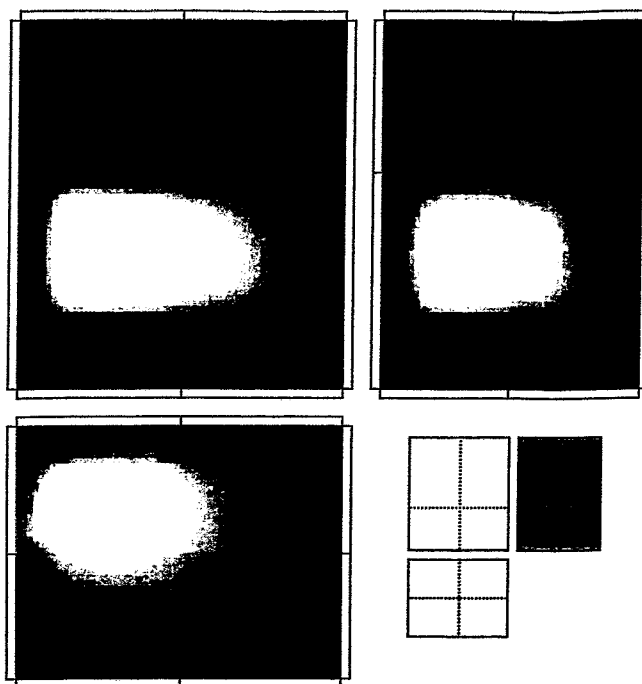


Bild 3.2-4: Vollständige Rückprojektion in den drei Betrachtungsebenen aus Bild 3.2-2

Wie Bild 3.2-4 zeigt, ist die Strahlungsdichte im Messgebilde inhomogen verteilt, wobei im Mittelpunkt des Messgebildes tatsächlich das vermutete Gefälle vorliegt. Außerhalb des Messgebildes nimmt die Strahlungsdichte mit der Entfernung rasch ab. Die Konturen des quaderförmigen Messgebildes heben sich im Bild 3.2-4 deutlich hervor. Die rekonstruierte Strahlungsdichte in der Gebindeoberfläche zeigt das Bild 3.2-5 als Hauptachsen-Projektion der Seitenflächen des Messgebildes; zum Vergleich mit der algebraischen Rekonstruktion sind links im Bild auch die Seitenflächen der Volumenelemente aus Bild 3.1-1 angedeutet.

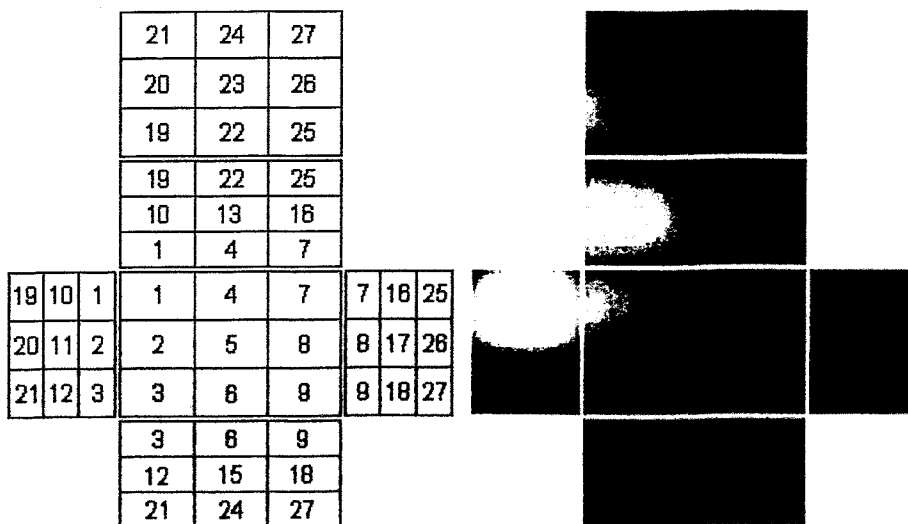


Bild 3.2-5: Rekonstruierte Oberflächen-Strahlungsdichte des Messgebildes im Vergleich mit den direkt angrenzenden Volumenelementen aus Bild 3.1-1, also ohne das zentrale Volumenelement 14

Die Strahlungsdichte im Bild 3.2-5 ist zwar von der eigentlich gesuchten Aktivitätskonzentration qualitativ verschieden, lässt aber trotzdem deutlich eine lokale Aktivitätskonzentration im Bereich des Volumenelementes 1 vermuten. Die zusätzliche relativ hohe Bewertung der Vo-

lumelement 10 und 19 ist durch die Geometrie der Detektoren begründet: Der im Bild 1-1 am weitesten links sichtbare Detektor erstreckt sich über die volle Höhe des Messgebindes und erlaubt daher zwischen den Volumenelementen 1, 10 und 19 keine Unterscheidung. Aus der vollständigen Rückprojektion entsteht schließlich durch eine 3D-Bandpass-Filterung, wobei der Durchlassbereich relativ niederfrequent gewählt ist, ein Abbild der räumlichen Aktivitätsverteilung, Bild 3.2-6.

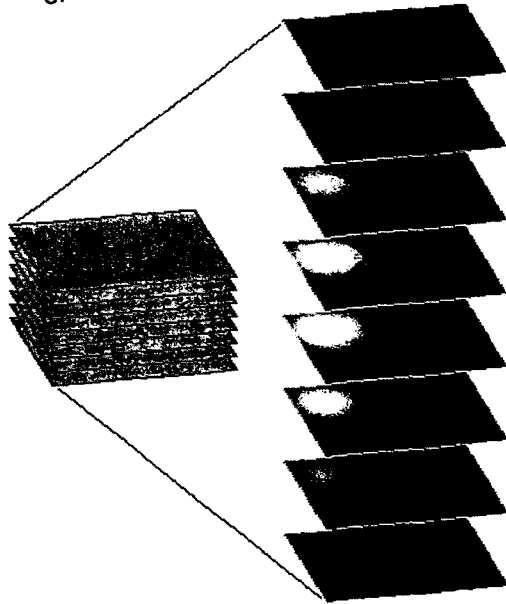


Bild 3.2-6: Rekonstruierte 3D-Aktivitätsverteilung, dargestellt in mehreren waagerechten Ebenen durch das Messgebände

Das analytische Ergebnis im Bild 3.2-6 entspricht in etwa dem algebraischen Ergebnis im Bild 3.1-4. Aufgrund der wenig ergiebigen Messinformation (nur 16 Zählraten bei unkollimierten Detektoren) erbringt das analytische Verfahren trotz viel feiner gewählter Volumendiskretisierung verständlicherweise keine auffallend detailreichere Aktivitätsverteilung; eine Duldung höherer Ortsfrequenzen bei der Filterung hätte lediglich numerische Artefakte ins Bild gebracht.

Die räumliche Aktivitätsverteilung im Bild 3.2-6 bekräftigt die bereits aus der Oberflächenverteilung der Strahlungsdichte im Bild 3.2-5 stammende Vermutung, dass die Aktivität im Bereich des Volumenelementen 1 konzentriert zu sein scheint. Die ermittelte räumliche Aktivitätsverteilung ist somit nicht aussagekräftiger als die Verteilung der Strahlungsdichte in der Oberfläche des Messgebindes. Dabei ist aber die 2D-Funktion im Bild 3.2-5 anschaulicher als die Darstellung im Bild 3.2-6 mit ihrer zur graphischen Darstellung auf eine 2D-Form reduzierten ursprünglichen 3D-Funktion.

Aus den weiteren Experimenten mit ihren Quellpositionen in den Volumenelementen 23, 11, 17, 19, 27 und 14 (vgl. Tabelle 3-1) wird jeweils nur die rekonstruierte Oberflächenstrahlungsdichte dargestellt, Bild 3.2-7. Die im Bild zuweilen erkennbaren Linienmuster sind numerische Effekte. Sie treten um so mehr hervor, je kleiner der Wertebereich des jeweiligen Bildinhaltes ist.

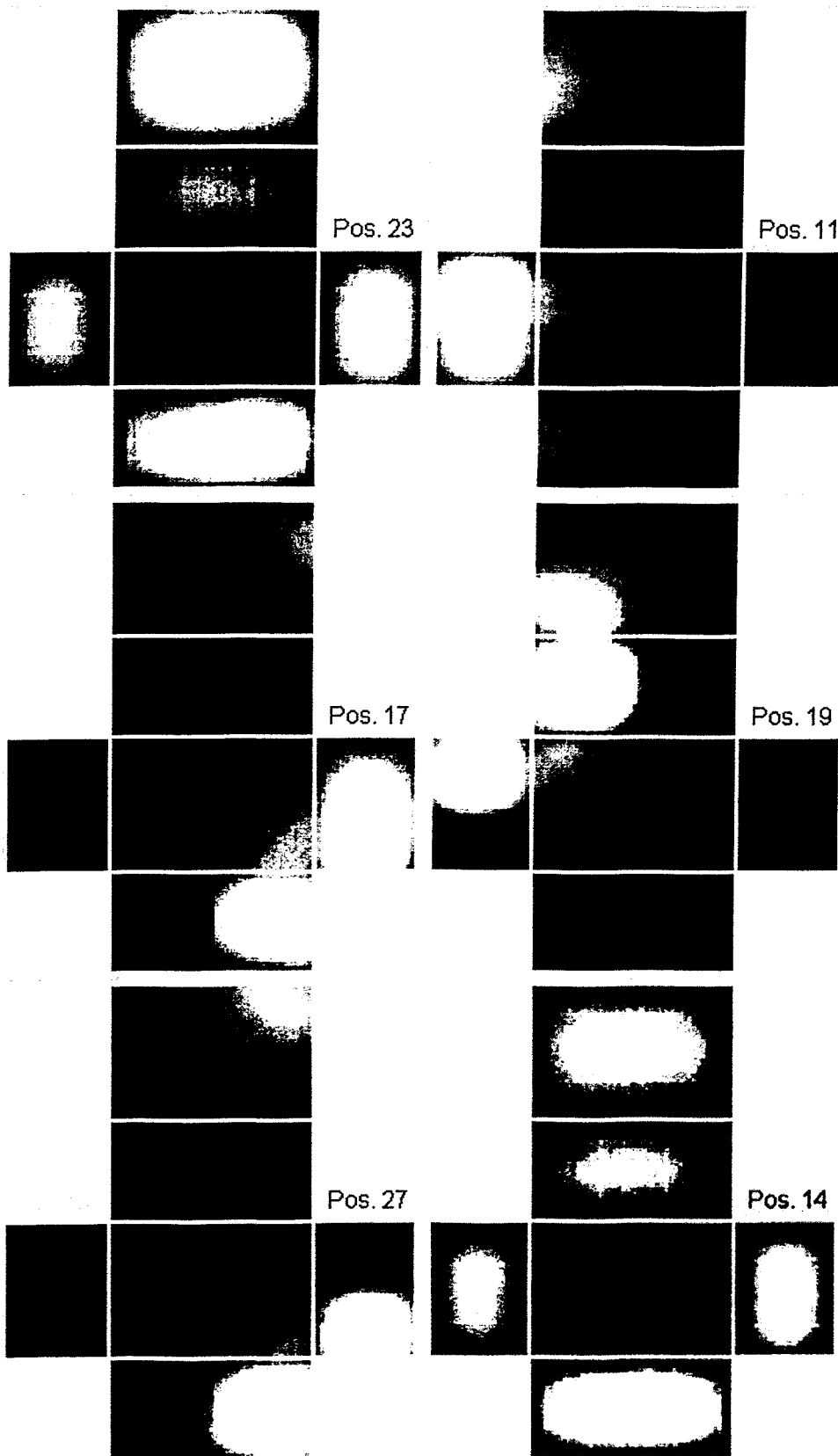


Bild 3.2-7: Die rekonstruierte Strahlungsdichte in der Oberfläche des Messgebindes für verschiedene Quellpositionen (s. Raster im Bild 3.2-6 links)

Die Oberflächen-Strahlungsdichten im Bild 3.2-7 entsprechen den realen Quellpositionen tendenziell um so besser, je weiter die Quelle vom Zentrum des Messgebindes (im Volumenelement 14) entfernt ist. So ist z.B. die Quellposition 19 erheblich weiter vom Zentrum entfernt als die Quellposition 23. Entsprechend genauer ist die Quellposition 19 im Rekonstruktionsbild lokalisiert.

4 Zusammenfassung

Das algebraische und das analytische Rekonstruktionsverfahren erbringen unter den gegebenen Messbedingungen qualitativ ähnliche und für den Zweck der Freimessung radioaktiver Stoffe durchaus zufriedenstellende Ergebnisse. Wie experimentell nachgewiesen wurde, werden lokal konzentrierte Aktivitäten um so genauer rekonstruiert, je näher sie sich an der Oberfläche des Messgebindes befinden. Die Wahl einer besonders feinen Diskretisierung des Gebindevolumens, wie sie beim analytischen Verfahren vorgenommen wurde, führt aufgrund der wenig ergiebigen Messinformation (nur 16 Zählraten bei unkollimierten Detektoren) nicht zu einer entsprechend höheren Auflösung der rekonstruierten Aktivitätsverteilung. Mithin genügen relativ grobe Diskretisierungen des Messgebindes in z.B. nur 3x3x3 oder 7x5x3 Volumenelemente, wie dies beim algebraischen Verfahren erfolgte. Mit dem analytischen Verfahren lässt sich außer der räumlichen Aktivitätsverteilung auch die Verteilung der Strahlungsdichte an der Oberfläche des Messgebindes rekonstruieren. In Verbindung mit einer feinen Diskretisierung ist diese Oberflächen-Strahlungsdichte anschaulicher darstellbar als die räumliche Aktivitätsverteilung.

Literatur

[Br99] Bracewell, R.: The Fourier Transform and its Applications. New York: McGraw-Hill, pp. 69-97, 1999.

[Cs91] Csiszár, I.: Why least squares and maximum entropy? – an axiomatic approach to inversion problems. Ann. Stat., vol. 19, 2033-2066, 1991.

[Ha98] Halling, H.: Tomographie: Eine interdisziplinäre Technik. KFK Jahresbericht 1998, 60 – 61.

[Ra17] Radon, J.: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. Sächsische Akademie der Wissenschaften, 69(1917), 262 - 277.

[KS88] Kak, A. C., Slaney, M.: Principles of Computerised Tomographic Imaging. IEEE Press. New York, 1988.

[SE99] Seifert, E.: Bericht in Vorbereitung.

[SSO92] Snyder, D. L., Schulz, T., O'Sullivan, A.: Deblurring subject to nonnegativity constraints. IEEE Trans. Signal Processing, 40:1143 - 1150, 1992.